Ю. А. МАКАРОВ
К. З. ХӘМИДУЛЛИНА

АЛГЕБРА

7-9

Ю. А. МАКАРОВ
К. З. ХӘМИДУЛЛИНА

АЛГЕБРА

7–9

Фәнне мөстәкыйль үзләштерү өчен уку ярдәмлеге

Татарстан Республикасы Мәгариф министрлыгы тарафыннан тәкъдим ителгән

КАЗАН
"МӘГАРИФ" НӘШРИЯТЫ
2000

УДК 51
ББК 22.14я7
М15

Макаров Ю. А., Хэмидуллина К. З

М15 Алгебра 7—9: Фәнне мөстәкыйль үзләштерү өчен уку ярдәмлеге.— Казан: Мәгариф, 2000.—176 б., рәс. белән.
ISBN 5-7761-0222-7

БЗ—61—62—95/96

Шушы китап материалларын нәшрият рөхсәтеннән башка янадан бастырып чыгару "Автор хокукы һәм эргәдәш хокуклар турында" Россия Федерациясе Законын бозу була. Моның өчен закон нигезендә җавапка тарту каралган.

Учебное издание

Макаров Юрий Афанасьевич
Хамидуллина Камария Зиннуровна

АЛГЕБРА
7–9

Учебное пособие
для индивидуальной работы учащихся

(на татарском языке)

Редакция мөдире *Ф. Г. Иштирәкова*. Редакторы *Ф. М. Хафизова*. Бизәлеш редакторы *Р. А. Сәйфуллина*. Техник редакторы *Л. И. Фокейчева*. Корректоры *А. А. Дәүләтова*.

Нәшриятка 8 нче номерлы лицензия 1991 елның 7 апрелендә бирелгән.
Җыярга тапшырылды 08.04.94. Басарга кул куелды 20.03.2000. Форматы $60\times90^1/_{16}$.
Китап-журнал кәгазе. "Антиква" гарнитурасы. Офсет басма. Басма табагы 11,0.
Нәшер-хисап табагы 8,67. Тиражы 3100 д. Заказ С-147.

"Мәгариф" нәшрияты. 420503. Казан, Бауман ур., 19.
Издательство "Магариф". 420503. Казань, ул. Баумана, 19.
Тел/факс (8432) 92-57-48.

ДУП "Полиграфия-нәшрият комбинаты"
420503. Казан, Бауман ур., 19.

ISBN 5-7761-0222-7
© "Мәгариф" нәшрияты, 2000

КЕРЕШ СУЗ

Хөрмәтле укучыбыз!

Математика — бик кызыклы фән. Ләкин шул ук вакытта катлаулы да ул. Шуңа күрә аны өйрәтеп булмый, өйрәнеп кенә була, диләр. Өйрәнергә тырышып та, җиңел укыла, җиңел аңлашыла торган дәреслекләр булмау сәбәпле, математиканы өйрәнә алмаучылар да аз түгел. Укытучылар исә хәзергә дәреслек телен "укучы теленә" тәрҗемә итү белән мәшгульләр.

Материалның кәгазьгә язып аңлатылышын укучы өчен уку кулланмасы дип атарга сүз куешыйк. Синең кулыңда, кадерле укучыбыз, уку кулланмасы. Аны теләгән кадәр укырга була. Анда, теориядән кала, типик мәсьәләләрнең чишелешләрен һәм ул чишелешләрнең язылышын табарга мөмкин. Сызым кирәк булган очракларда, ул сызым тулаем бер рәсемдә бирелми, ә аның этаплап барлыкка килү динамикасы күрсәтелә. Кулланманың һәр параграфы зачет сорауларын эченә ала. Үзенең белемен тикшереп карыйсы килгән укучы өчен ул сораулар файдалы булыр дип уйлыйбыз. Тагын шуңа игътибар итәрсең: "3" ле билгесе алу өчен — бер төрле сорауларга, "4" ле һәм "5" ле билгеләре алу өчен, өстәмә рәвештә катлаулырак биремнәргә һәм сорауларга җавап бирергә кирәк булачак. Үзеңнең теләгең буенча, төрле күләмдәге һәм төрле катлаулылыктагы сорауларга җавап бирә аласың. Бу — фәнне мөстәкыйль үзләштерү технологиясенең нигезенә салынган төп принципларның берсе.

Кулланманың һәр параграфы, шул параграф номерлы контроль эш тексты белән төгәлләнә. Бу үзенчәлек шулай ук синең күңелеңә хуш килер, кадерле укучыбыз. Әмма монда сиңа әйтәсе килгән бер сер бар. Контроль эшне эшләр алдыннан, һәр параграф материалы буенча төзелгән мисал-мәсьәләләр "чылбырын" узарга кирәк. Ә ул мисал-мәсьәләләр, икенче төрле сүзләр белән әйтсәк, дидактик материаллар — аерым чыгачак. Димәк, контроль эш тексты хәзергә сиңа белергә тиешле төп күнекмәләрне эченә алган ориентир практик материал булып хезмәт итәр.

Гомумән, без бу кулланманы чыгарып, математика фәнен әйбәт белүченең дә, уртача белүченең дә һәм бик үк әйбәт белмәгән укучының да уку хезмәтен аз гына булса да җиңеләйтергә омтылып карадык.

Сиңа уңышлар телибез!

Авторлар.

7 сыйныф

§ 1. АҢЛАТМАЛАР

Арифметиканың төп кагыйдәләрен кабатлап үтик.

Кагыйдә. *Унарлы вакланмаларны кушу яки алу өчен, бөтен өлешләрне бөтеннәр астына, өтерне өтер астына, унынчы өлешләрне унынчы өлешләр астына, йөзенче өлешләрне йөзенче өлешләр астына һ.б.ш. язарга һәм гамәлләрне эшләргә кирәк.*

Мисаллар.
$$\begin{array}{r} 3{,}421 \\ -\;1{,}26 \\ \hline 2{,}161 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6{,}2 \\ +\;3{,}863 \\ \hline 10{,}063 \end{array}$$

Кагыйдә. *Унарлы вакланмаларны тапкырлау өчен, аларны бөтен саннарны тапкырлаган кебек тапкырларга кирәк һәм тапкырлаучыларның икесендә бергә өтердән соң ничә цифр булса, җавапта шулкадәр цифрны уңнан сулга таба санап, өтер белән аерырга кирәк.*

Мисал.
$$\begin{array}{r} 3{,}21 \\ \times\;\;5{,}3 \\ \hline 963 \\ 1605 \\ \hline 17{,}013 \end{array}$$

Кагыйдә. *Санны унарлы вакланмага бүлү өчен, бүлүче бөтен санга әйләнерлек итеп, бүлүчедә дә, бүленүчедә дә өтерне уңга таба бер үк санга күчерергә һәм бөтен санга бүлгән кебек бүләргә кирәк.*

Мисаллар. $2{,}635 : 0{,}5 = 26{,}35 : 5 = 5{,}27$;

$$\begin{array}{l|l} 26{,}35 & 5 \\ \cline{2-2} \underline{25} & 5{,}27 \\ \;\;13 & \\ \;\;\underline{10} & \\ \;\;\;\;35 & \\ \;\;\;\;\underline{35} & \\ \;\;\;\;\;\;0 & \end{array}$$

$$0{,}8 : 0{,}002 = 800 : 2 = 400$$

Кагыйдә. *Аралаш вакланманы катнаш санга әйләндерү өчен вакланманың санаучысын ваклаучысына бүләргә кирәк, өлеш бу санда ничә бөтен барлыгын күрсәтер, калдык санаучы булып калыр, ә ваклаучы үзгәрмәс.*

Мисаллар. $\frac{36}{7}=5\frac{1}{7}$

$$\begin{array}{r|l} 36 & 7 \\ \cline{2-2} \underline{35} & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$\frac{65}{13}=5$

$$\begin{array}{r|l} 65 & 13 \\ \cline{2-2} \underline{65} & 5 \\ 0 & \end{array}$$

Кагыйдә. *Катнаш санны аралаш вакланмага әйләндерү өчен ваклаучыны бөтен санга тапкырларга һәм аңа санаучыны кушарга, килеп чыккан санны санаучыга язарга, ә ваклаучыны үзгәрешсез калдырырга кирәк.*

Мисаллар. $5\frac{3}{7}=\frac{38}{7}$; $8\frac{1}{3}=\frac{25}{3}$;

$7\cdot 5+3=35+3=38$; $3\cdot 8+1=24+1=25$.

Кагыйдә. *Иң кечкенә уртак ваклаучыны (ИКУВ) табу өчен:*

1) *барлык ваклаучыларны тапкырлаучыларга таркатырга;*

2) *бер ваклаучының барлык тапкырлаучыларын язып алырга;*

3) *башка ваклаучылардан җитмәгән тапкырлаучыларны өстәп язарга;*

4) *аларны тапкырларга кирәк.*

Мисал. $\frac{1}{15}$ һәм $\frac{1}{18}$ нең ИКУВ сын табарга.

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

ИКУВ $(15, 18)=3\cdot 5\cdot 2\cdot 3=90$;

2 һәм 3 — җитмәгән тапкырлаучылар.

Мисал. $\frac{1}{15}$ һәм $\frac{1}{20}$ вакланмаларының ИКУВ сын табарга.

Бу вакланмаларның ИКУВ сын телдән дә табарга мөмкин. Бу 60 саны. 60 саны — 15 кә һәм 20 гә бүленә торган иң кечкенә сан.

Кагыйдә. *Вакланмаларны кыскарту өчен аның санаучысын да, ваклаучысын да бер үк санга бүләргә кирәк.*

Мисаллар. $\frac{15}{20}=\frac{15:5}{20:5}=\frac{3}{4}$, $\frac{25}{30}=\frac{5}{6}$, $7\frac{8}{12}=7\frac{2}{3}$.

Кагыйдә. *Гади вакланмаларны кушу яки алу өчен:*

1) *ИКУВ ны табарга;*

2) *ИКУВ ны һәр ваклаучыга бүлү юлы белән өстәмә тапкырлаучыларны табарга;*

3) *аларны санаучыларга тапкырларга;*

4) *гамәлне эшләргә;*

5) *мөмкин булса, җавапны кыскартырга кирәк.*

Мисаллар. $\frac{^{5/}5}{12}+\frac{^{4/}4}{15}=\frac{25+16}{60}=\frac{41}{60}$; ИКУВ=60.

$$3\frac{^{4/}5}{9}-1\frac{^{3/}5}{12}=2\frac{20-15}{36}=2\frac{5}{36};\ \text{ИКУВ}=36.$$

$$3\frac{^{4/}2}{9}-1\frac{5}{12}=2\frac{8-15}{36}=1\frac{36+8-15}{36}=1\frac{29}{36};$$

$$5-\frac{2}{3}=4\frac{3}{3}-\frac{2}{3}=4\frac{1}{3}.$$

Кагыйдә. *Гади вакланмаларны тапкырлау өчен аларның санаучыларын һәм ваклаучыларын үзара тапкырларга, мөмкин булганда җавапны кыскартырга кирәк.*

Мисал. $\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{7}=\frac{5\cdot\cancel{3}^{1}}{_{2}\cancel{6}\cdot 7}=\frac{5}{14}$;

$$1\frac{1}{2}\cdot 2\frac{1}{3}=\frac{\cancel{3}^{1}\cdot 7}{2\cdot\cancel{3}_{1}}=\frac{7}{2}=3\frac{1}{2};$$

Кагыйдә. *Санны гади вакланмага бүлү өчен бу санны вакланманың кире вакланмасына тапкырларга кирәк.*

Мисаллар. $\frac{5}{8}:\frac{2}{3}=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{2}=\frac{5\cdot 3}{8\cdot 2}=\frac{15}{16}$;

$$2\frac{1}{5}:3\frac{2}{3}=\frac{11}{5}:\frac{11}{3}=\frac{11}{5}\cdot\frac{3}{11}=\frac{^{1}\cancel{11}\cdot 3}{5\cdot\cancel{11}_{1}}=\frac{3}{5}.$$

Кагыйдә. *Гади вакланманы унарлыга әйләндерү өчен санаучыны ваклаучыга бүләргә кирәк. Ваклаучысы икеле һәм бишләрдән торган вакланмалар унарлыга әйләнәләр.*

100 гә кадәр: 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 32, 40, 50, 64, 80, 100.

Мисаллар. $\frac{7}{40} = 0{,}175;$

$$\begin{array}{r|l} 7 & 40 \\ \underline{-0} & 0{,}175 \\ 70 & \\ \underline{-40} & \\ 300 & \\ \underline{-280} & \\ 200 & \\ \underline{-200} & \\ 000 & \end{array}$$

$5\frac{1}{5} = 5{,}2;$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 5 \\ 10 & 0{,}2 \\ \underline{-10} & \\ 0 & \end{array}$$

$\frac{1}{33}$ унарлыга әйләнми.

$3{,}4 + \frac{7}{20}, \frac{7}{20}$ унарлыга әйләнә: $\frac{7}{20} = 0{,}35$, $3{,}4 + 0{,}35 = 3{,}75$.

$3{,}4 + \frac{7}{30} = 3\frac{^{3}4}{10} + \frac{^{1}7}{30} = 3\frac{12+7}{30} = 3\frac{19}{30}$, $\frac{19}{30}$ унарлыга әйләнми.

Кагыйдә. *Ике унарлы вакланманы чагыштыру өчен, аларның бөтен өлешләрен чагыштырып карарга кирәк. Бөтеннәр бер үк санда булса, унынчы өлешләрне чагыштырырга һ. б. ш. дәвам итәргә кирәк.*

Мисаллар. 12,39 һәм 12,41 не чагыштырырга.
$12{,}39 < 12{,}41$, чөнки 12,41 дә унынчы өлешләр күбрәк.
$8{,}05 > 8{,}005$, чөнки 8,05 тә йөзенче өлешләр күбрәк.

Кагыйдә. *Гади вакланмаларны чагыштыру өчен, аларны уртак ваклаучыга китерергә һәм санаучыларын чагыштырырга кирәк. Ваклаучылары төрле булган вакланмаларны чагыштырырга ярамый!*

Мисаллар. $\frac{3}{5}$ һәм $\frac{5}{7}$ не чагыштырырга, $\frac{^{7}3}{5} = \frac{21}{35}, \frac{^{5}5}{7} = \frac{25}{35}$.

ИКУВ = 35; $25 > 21$, шуңа күрә $\frac{3}{5} < \frac{5}{7}$.

Билгеләмә. Саннарны гамәл тамгалары һәм җәяләр белән тоташтырып төзелгән язылыш **санлы аңлатма** дип атала.

Санлы аңлатмаларга мисаллар:

$$3 + 2 - 5 \cdot (7{,}3 : 0{,}0005); \; 10{,}1 - 1{,}01;$$

$$\frac{7}{8}:\frac{6}{11}-7,289; \quad 4\cdot\left(3\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}\right)+0,64.$$

Билгеләмә. Санлы аңлатмадагы гамәлләрне үтәгәч килеп чыккан сан **аңлатманың кыйммәте** дип атала.

Аңлатманың кыйммәтен табу өчен барлык гамәлләрне үтәргә кирәк. Әгәр аңлатмада нульгә бүлү килеп чыкса, аңлатманың мәгънәсе юк диләр.

Мисаллар. Аңлатмаларның кыйммәтләрен табарга.

а) $\frac{7}{8}\cdot(5,3+0,7)=5\frac{1}{4}$

1) $\begin{array}{r} 5,3 \\ +\ 0,7 \\ \hline 6,0 \end{array}$ 2) $\frac{7}{8}\cdot 6=\frac{7\cdot\overset{3}{\not 6}}{{}_4\not 8\cdot 1}=\frac{21}{4}=5\frac{1}{4}$.

б) $10:(0,75:2-0,375)$

1) $0,75:2=0,375$ 2) $0,375-0,375=0$

3) $10:0$ — ярамый. Аңлатманың кыйммәте юк.

Турыпочмаклыкның мәйданын табу өчен аның иңен буена тапкырлыйлар. Әгәр буе 5 см, ә иңе 4 см булса, мәйданы $5\cdot4=20$ (см^2) булыр. Әгәр буе 9 м, ә иңе 8 м булса, мәйданы $9\cdot8=72$ (см^2) булыр. Буй һәм иң теләсә нинди уңай сан булырга мөмкин. Буен a хәрефе, ә иңен b хәрефе белән билгеләсәк, мәйданы ab булыр. Бу аңлатмада a һәм b хәрефләре бар һәм ул турыпочмаклык мәйданын ничек исәпләгәнне күрсәтә. a һәм b төрле кыйммәтләр ала алалар, мәсәлән, $a=5$ һәм $b=6$ булганда $a\cdot b=5\cdot6=30$,

$a=1,1$ һәм $b=6$ булганда $a\cdot b=1,1\cdot6=6,6$,

$a=\frac{2}{3}$ һәм $b=\frac{3}{5}$ булганда $a\cdot b=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2\cdot\not 3}{\not 3\cdot 5}=\frac{2}{5}$.

Билгеләмә. Саннарны һәм хәрефләрне гамәл билгеләре белән тоташтырып төзелгән аңлатма **үзгәрешлеле аңлатма** дип атала.

Үзгәрешлеле аңлатмаларга мисаллар: $2a$, $m+p$, $\frac{x+y}{3}$,

$3\ (a+b)\cdot(x-y)$, a^2-b^2, $3a+4b-5c$.

Әгәр үзгәрешлеле аңлатмага хәреф урынына сан куйсак, санлы аңлатма килеп чыга һәм аның кыйммәтен табарга мөмкин. Хәрефләр урынына төрле саннар куеп, бер үк аңлатманың төрле кыйммәтләрен табарга була.

Мисал. $a=5$; 0; $3,1$ булганда, $3a+10$ аңлатмасының кыйммәтләрен табарга.

a урынына 5 санын куйыйк. Табабыз:

$$3a+10=3\cdot5+10=15+10=25.$$

a урынына 0 не куйыйк:

$$3a + 10 = 3 \cdot 0 + 10 = 0 + 10 = 10.$$

a урынына 3,1 не куйыйк:

$$3a + 10 = 3 \cdot 3{,}1 + 10 = 9{,}3 + 10 = 19{,}3.$$

Кайвакыт җавапларны таблицага да язалар.

Мисал. Таблицаны тутырырга:

x	0	2	4	6
$2x+1$				

Беренче юлда x үзгәрешлесенең кыйммәтләре күрсәтелгән.
$x = 0$ булганда $2x + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1$,
$x = 2$ булганда $2x + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 4 + 1 = 5$,
$x = 4$ булганда $2x + 1 = 2 \cdot 4 + 1 = 8 + 1 = 9$,
$x = 6$ булганда $2x + 1 = 2 \cdot 6 + 1 = 12 + 1 = 13$.

Таблицаны тутырабыз:

x	0	2	4	6
$2x+1$	1	5	9	13

Үзгәрешлеләр берничә булырга мөмкин.

Мисал. $a = 5$, 6 һәм 7, $b = 0$, 1 һәм 2 булганда $2a + 3b$ аңлатмасының кыйммәтләрен исәпләргә.

Аңлатмага a урынына 5 һәм b урынына 0 не куйыйк. Табабыз:

$$2a + 3b = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 0 = 10 + 0 = 10.$$

Шуңа охшаш рәвештә табабыз:

$a = 6$, $b = 1$ булганда $2a + 3b = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 1 = 12 + 3 = 15$.
$a = 7$, $b = 2$ булганда $2a + 3b = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 2 = 14 + 6 = 20$.

I нче зачет

1. Санлы аңлатма нәрсә ул?
2. Аңлатманың кыйммәте дип нәрсәгә әйтәләр?
3. Нәрсә ул үзгәрешлеле аңлатма?

I нче контроль эш

1. $\left(1{,}75 : \frac{2}{3} - 1\frac{3}{4} : 1{,}25\right) \cdot 6$ аңлатмасының кыйммәтен табыгыз.

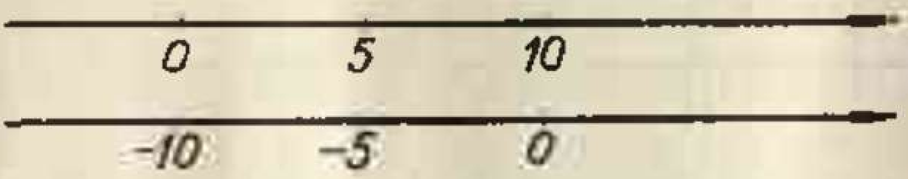
2. Таблицаны тутырыгыз

a	0	2	4	10
$4a+1$				

§ 2. РАЦИОНАЛЬ САННАР

Сез инде унай саннардан тыш тискәре саннар да булуын беләсез. Уңай саннар, тискәре саннар һәм нуль **рациональ саннар** дип аталалар. Рациональ саннар турындагы кайбер сорауларны искә төшерик.

Кагыйдә. *Теләсә нинди ике рациональ санның саннар күчәрендә уңдарак урнашканы зуррак була.*



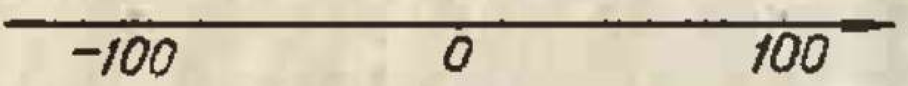
$10 > 5$
$-5 > -10$

Рәс. 1

Теләсә нинди уңай сан нульдән зуррак була. Теләсә нинди тискәре сан нульдән кечерәк була. Теләсә нинди уңай сан теләсә нинди тискәре саннан зуррак була.

Билгеләмә. Саннар күчәрендә нульдән бертигез ераклыкта урнашкан ике сан **капма-каршы саннар** дип аталалар.

Капма-каршы саннар: 2 һәм -2, -100 һәм 100.



Рәс. 2

Уңай санга капма-каршы сан тискәре сан була. Тискәре санга капма-каршы сан уңай сан була. Нульгә капма-каршы сан юк.

Билгеләмә. Әгәр сан уңай сан яки нуль булса, сан үзе, ә инде тискәре сан булса, аңа капма-каршы булган сан бу санның **модуле** яки **абсолют зурлыгы** дип атала.

Модуль $| \ |$ билгесе белән күрсәтелә.

$|5|$ язылышы "5 санының модуле" дип укыла. $|5| = 5$. $|-5|$ язылышы "минус 5 санының модуле" дип укыла. $|-5| = 5$.

Санның модуле бервакытта да тискәре сан булмый. Ул бу санның нульдән нинди ераклыкта урнашуын күрсәтә.

$|-10| = 10, \quad |10| = 10, \quad |-3| = 3, \quad |0| = 0.$

Кагыйдә. *Бер үк тамгалы саннарны кушу өчен аларның модульләрен кушарга һәм аларның уртак тамгаларын куярга кирәк.*

Мисаллар. $-5 - 6 = -11, \quad 5 + 6 = +11.$

Кагыйдә. *Төрле тамгалы саннарны кушу өчен модуле зуррак булган саннан кечерәк модульлесен алырга һәм модуле зуррак санның тамгасын куярга кирәк.*

Мисаллар. $+10-3=+7, \quad -10+3=-7, \quad -3+3=0.$

Кагыйдә. *Сан алдында ике бертөрле тамга торса, аларны плюс тамгасы белән алмаштырырга мөмкин. Сан алдында ике бертөрле булмаган тамга торса, аларны минус тамгасы белән алмаштырырга мөмкин.*

Мисаллар. $5+(-2)+3-(+4)=5-2+3-4=8-6=2,$
$-3-(-4)+(-3)=-3+4-3=4-6=-2.$

Кагыйдә. *Төрле тамгалы берничә санны кушу өчен түбәндәгеләрне эшләргә кирәк:*
1) *җәяләрне ачарга;*
2) *плюс тамгалы саннарны кушарга;*
3) *минус тамгалы саннарны кушарга;*
4) *төрле тамгалы саннарны кушуны башкарырга.*

Кагыйдә. *Бер үк тамгалы саннарны тапкырлау (яки бүлү) өчен аларның модульләрен тапкырларга (яки бүләргә) һәм плюс тамгасын куярга кирәк.*

Мисаллар. $-10:(-2)=5, \qquad 10:2=5,$
$7\cdot 0{,}2=1{,}4, \qquad -7\cdot(-0{,}2)=1{,}4.$

Кагыйдә. *Төрле тамгалы саннарны тапкырлау (яки бүлү) өчен аларның модульләрен тапкырларга (яки бүләргә) һәм минус тамгасын куярга кирәк.*

Мисаллар. $-7\cdot 2=-14, \qquad -18:3=-6,$
$7:(-2)=-3{,}5, \qquad 18\cdot(-2)=-36.$

Мисал. $n=0$; 5 һәм -5 булганда, $3n-8$ аңлатмасының кыйммәтен табарга.

Чишү. $n=0$ булса, $3n-8=3\cdot 0-8=0-8=-8,$
$n=5$ булса, $3n-8=3\cdot 5-8=15-8=7,$
$n=-5$ булса, $3n-8=3\cdot(-5)-8=-15-8=-23.$

Мисал. Таблицаны тутырырга:

c	-5	-4	-3	0	3	5
$2c-1$						

$c=-5$ булса, $2c-1=2\cdot(-5)-1=-10-1=-11,$
$c=-4$ булса, $2c-1=2\cdot(-4)-1=-8-1=-9.$

Шул ук юл белән башка җавапларны табабыз һәм таблицага язабыз:

c	-5	-4	-3	0	3	5
$2c-1$	-11	-9	-7	-1	5	9

Мисал. $a = -2$ һәм $b = -3$ булганда $\frac{2a-3b}{2}$ аңлатмасының кыйммәтен табарга.

$a = -2$ һәм $b = -3$ булса, $\frac{2a-3b}{2} = \frac{2\cdot(-2)-3\cdot(-3)}{2} = \frac{-4+9}{2} = \frac{5}{2} = 2,5.$

2 нче зачет

1. Рациональ саннарны чагыштыру кагыйдәсе.
2. Нинди саннар капма-каршы саннар дип атала?
3. Нәрсә ул санның модуле?
4. Бер үк тамгалы саннарны кушу кагыйдәсе.
5. Төрле тамгалы саннарны кушу кагыйдәсе.
6. Җәяләрне ачу кагыйдәсе.
7. Берничә санны кушу кагыйдәсе.
8. Бер үк тамгалы саннарны тапкырлау (бүлү) кагыйдәсе.
9. Төрле тамгалы саннарны тапкырлау (бүлү) кагыйдәсе.

2 нче контроль эш

1. $(-113 + (-74) - 23) : 14$ аңлатмасының кыйммәтен табыгыз.
2. Таблицаны тутырыгыз:

x	-2	-1	0	2	4
$x-2$					

§ 3. ДӘРӘҖӘ

Билгеләмә. Һәрберсе a га тигез булган n тапкырлаучының тапкырчыгышы a санының n күрсәткечле **дәрәҗәсе** дип атала. a^n— дәрәҗә; a — дәрәҗәнең нигезе; n — дәрәҗәнең күрсәткече була. Дәрәҗәнең кыйммәтен табу **дәрәҗәгә күтәрү** дип атала.

Мисаллар. 5^4 язылышы "бишнең дүртенче дәрәҗәсе" дип укыла, биредә 5— дәрәҗәнең нигезе, 4— күрсәткеч.

$$5^4 = 5\cdot5\cdot5\cdot5 = 625.$$

10^5 "унның бишенче дәрәҗәсе" дип укыла, 10 — нигез, ә 5 — күрсәткеч.

$$10^5 = 10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10 = 100000.$$

$$a^6 = a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a;\ x^8 = x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x.$$

Киресенчә дә, $m\cdot m\cdot m\cdot m\cdot m\cdot m\cdot m$ аңлатмасын m^7 дип, яки $2\cdot2\cdot2\cdot2 = 2^4$ дип язарга мөмкин.

Икенче дәрәҗәне квадрат дип, өченче дәрәҗәне куб дип әйтү кабул ителгән.

5^2 "бишнең квадраты" дип укыла. $5^2 = 5\cdot5 = 25$.

4^3 "дүртнең кубы" дип укыла. $4^3=4\cdot4\cdot4 = 64$.

Мисал. 36; 0,01; $\frac{1}{4}$ саннарын квадрат рәвешендә күрсәтергә.

Чишү. $36 = 6^2$, чөнки $6 \cdot 6 = 36$.

$0,01 = 0,1^2$, чөнки $0,1 \cdot 0,1 = 0,01$.

$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, чөнки $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Дәреслекнең тышлыгында 1 дән 10 га кадәр саннарның квадратлары һәм кублары таблицасы һәм 2 белән 3 саннарынын дәрәҗәләре таблицасы бирелгән.

Мисаллар. 8^2 ын һәм 8^3 ын табарга.

Беренче таблицада 8 саны астында түбәндәге санны табабыз: $8^2 = 64$ һәм $8^3 = 512$.

Икенче таблицада 9 саны астында түбәндәге санны табабыз: $2^9 = 512$ һәм $3^9 = 19\,683$.

Бу таблицалар буенча кире мәсьәләне дә чишәргә мөмкин.

Мисал. 343 не санның кубы рәвешендә язарга.

Беренче таблицадан 343 санын эзләп табабыз. Күргәнебезчә, бу — 7 санының кубы, $343 = 7^3$.

Мисал. 729 санын дәрәҗә рәвешендә язарга.

Икенче таблицадан 729 санын эзлибез. Аның 3 санының 6 нчы дәрәҗәсе икәнлеген күрәбез. $729 = 3^6$.

Дәрәҗәләрне тапкырлау

$2^3 \cdot 2^4$ гамәлен эшләргә кирәк булсын. $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ һәм $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, шуңа күрә $2^3 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^7$. Гомумән, $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, чөнки

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{n \text{ тапкыр}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{m \text{ тапкыр}} = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n+m \text{ тапкыр}} = a^{n+m}.$$

Кагыйдә. *Нигезләре бер үк булган дәрәҗәләрне тапкырлау өчен, нигезне үзгәрешсез калдырып, дәрәҗә күрсәткечләрен кушарга кирәк.*

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Мисаллар. Гамәлләрне эшләргә:

$$a^{10} \cdot a^2 = a^{10+2} = a^{12}, \qquad b^4 \cdot b^5 = b^9,$$
$$7^3 \cdot 7^7 = 7^{10}, \qquad x^5 \cdot x^4 \cdot x^3 = x^{12}.$$

Мисал. Исәпләргә: $2^5 \cdot 2^3 = 2^8 = 256$,
$10^3 \cdot 10^4 = 10^7 = 10\,000\,000$.

Киресенчә, дәрәҗәне ике дәрәҗә тапкырчыгышы рәвешендә күрсәтергә мөмкин, мәсәлән, $x^{10} = x^9 \cdot x$ яки башкача:

$$x^{10} = x^5 \cdot x^5 \text{ яки } x^{10} = x^2 \cdot x^8.$$

Мисал. Таблицалар ярдәмендә исәпләргә: $2^5 \cdot 2^3$ һәм $27 \cdot 243$.

Чишү. $2^5 \cdot 2^3 = 2^8$. Таблицадан карап табабыз: $2^8 = 512$.
$27 \cdot 243$. Таблицадан карыйбыз: $27 = 3^3$ һәм $243 = 3^5$.
$27 \cdot 243 = 3^3 \cdot 3^5 = 3^8$ һәм таблица буенча $3^8 = 6561$.

Исегездә калдырыгыз: төрле нигезле дәрәҗәләрне тапкырларга **ярамый**!

Мәсәлән, $2^3 \cdot 5^5$ гамәлен эшләү өчен аерым-аерым $2^3 = 8$ һәм $5^4 = 625$ не исәпләргә һәм 8 не 625 кә тапкырларга кирәк. $x^3 \cdot y^8$ гамәлен эшләргә ярамый.

Дәрәҗәләрне бүлү

$2^6 : 2^2$ не табарга кирәк булсын. $2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ һәм $2^2 = 2 \cdot 2$. Бүлүне вакланма рәвешендә язабыз:

$$2^6 : 2^2 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{1} = 2^4$$

Ике икелегә кыскартабыз: ләкин $4 = 6 - 2$, шуңа күрә $2^6 : 2^2 = 2^4$.

Гомумән, $a^n : a^m = a^{n-m}$, чөнки $a^n : a^m = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdots a}^{n \text{ тапкыр}}}{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m \text{ тапкыр}}}$. m тапкырлаучыга кыскартып, a^{n-m} ны табабыз.

Кагыйдә. *Нигезләре бер үк булган дәрәҗәләрне бүлү өчен, нигезне үзгәрешсез калдырып, беренче күрсәткечтән икенче күрсәткечне алырга кирәк.*

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

Мисаллар. $5^{10} : 5^2 = 5^{10-2} = 5^8$, $a^{18} : a^6 = a^{12}$,
$x^7 : x = x^{7-1} = x^6$.

Әгәр күрсәткечләр тигез булса, беренчедән, $a^n : a^n = 1$, чөнки бер үк сан үз-үзенә бүленә, икенчедән, кагыйдә буенча $a^n : a^n = a^{n-n} = a^0$. Шунлыктан, нуль күрсәткечле дәрәҗәне берәмлеккә тигез дип йөртәләр.

$$a^0 = 1.$$

Мисаллар. Гамәлләрне эшләргә: $x^{10} : x^2 = x^8$, $20^{20} : 20^5 = 20^{15}$, $(2x)^7 : (2x) = (2x)^6$; $\frac{7^{10}}{7^3} = 7^7$, $3^{10} : 3^3 = 3^7$ һәм таблица буенча, $3^7 = 2\,187$.

$$\left(7\frac{1}{2}\right)^5 : \left(7\frac{1}{2}\right)^3 = \left(7\frac{1}{2}\right)^2 = 7\frac{1}{2} \cdot 7\frac{1}{2} = \frac{15}{2} \cdot \frac{15}{2} = \frac{225}{4} = 56\frac{1}{4}.$$

$$\frac{3^5 \cdot 3^6}{3^7} = \frac{3^{11}}{3^7} = 3^4 = 81.$$

Мисал. $a = 5$ һәм $b = 10$ булганда $2a^3b^0$ аңлатмасының кыйммәтен табарга.

Чишү. $2a^3b^0 = 2 \cdot 5^3 \cdot 10^0 = 2 \cdot 125 \cdot 1 = 250$.

Дәрәҗәне дәрәҗәгә күтәрү

2^3 не квадратка күтәрергә кирәк булсын: $(2^3)^2$.

Квадратка күтәрү санны үз-үзенә тапкырлау дигән сүз.

$(2^3)^2 = 2^3 \cdot 2^3 = 2^6$, ләкин $6 = 2 \cdot 3$, димәк, $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6$ һәм,

гомумән, $(a^m)^n = a^{mn}$, чөнки $(a^m)^n = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ тапкыр}}} = a^{m \cdot n}$

Кагыйдә. *Дәрәҗәне дәрәҗәгә күтәрү өчен, нигезне үзгәрешсез калдырып, күрсәткечләрне тапкырларга кирәк.*

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Мисаллар. $(a^3)^{10} = a^{30}$; $(b^5)^2 = b^{10}$; $(7^8 \cdot 7^3)^2 = (7^{11})^2 = 7^{22}$; $(2^3)^3 = 2^9$ һәм таблица буенча $2^9 = 512$.

Гадиләштерергә: $(x^3)^2 \cdot x^4 = x^6 \cdot x^4 = x^{10}$,

$$(m^{15}) : (m^2)^3 = m^{15} : m^6 = m^9.$$

Тапкырчыгышны һәм өлешне дәрәҗәгә күтәрү

Кагыйдә. *Тапкырчыгышны дәрәҗәгә күтәрү өчен һәр тапкырлаучыны шул ук дәрәҗәгә күтәрергә кирәк.*

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Исбатлау. $(a \cdot b)$ ны n нчы дәрәҗәгә күтәрү — аны үз-үзенә n тапкыр тапкырлау дигән сүз.

$(a \cdot b)^n = \underbrace{(ab) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (ab)}_{n \text{ тапкыр}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ тапкыр}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{n \text{ тапкыр}}$, ләкин $\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n} = a^n$

һәм $\underbrace{b \cdot b \cdots b}_{n} = b^n$, шуңа күрә $(ab)^n = a^n \cdot b^n$. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

Мисаллар. Гадиләштерергә: $(a \cdot b)^5 = a^5 \cdot b^5$, $(3a)^{10} = 3^{10} \cdot a^{10}$.

Исәпләргә: $(2 \cdot 10)^4 = 2^4 \cdot 10^4 = 16 \cdot 10\,000 = 160\,000$.

Кире мәсьәлә. $m^7 \cdot n^7 = (m \cdot n)^7$ не дәрәҗә рәвешендә күрсәтергә.

Исәпләргә: $2^5 \cdot 5^5$

Чишү. 2^5 һәм 5^5 дәрәҗәләрен аерым исәпләп, нәтиҗәләрне тапкырларга мөмкин. Ләкин кагыйдә буенча гадирәк тә исәпләргә була:

$$2^5 \cdot 5^5 = (2 \cdot 5)^5 = 10^5 = 100\,000.$$

Кагыйдә. *Вакланманы дәрәҗәгә күтәрү өчен, ваклаучыны да, санаучыны да шул ук дәрәҗәгә күтәрергә кирәк.*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Бу кагыйдәне исбатлау моннан алдагы кагыйдәне исбатлауга ошаган.

Мисаллар. Гадиләштерергә: $\left(\frac{m}{n}\right)^7 = \frac{m^7}{n^7}$, $\left(\frac{x}{y}\right)^{10} = \frac{x^{10}}{y^{10}}$,

Исәпләргә: $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$,

$$(0,25)^4 = \left(\frac{25}{100}\right)^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1^4}{4^4} = \frac{1}{256}.$$

Исәпләргә: $\frac{2^3 \cdot 4^4}{8^2}$

Чишү. Нигезләр төрле, шуңа күрә дәрәҗәләрне тапкырларга да, бүләргә дә ярамый. Күрсәткечләр дә төрле, кагыйдәне дә кулланып булмый. Ләкин барлык нигезләрне дә бертөрле итәргә мөмкин:

$$4 = 2^2, \qquad 8 = 2^3.$$

$$\frac{2^3 \cdot 4^4}{8^2} = \frac{2^3 \cdot (2^2)^4}{(2^3)^2} = \frac{2^3 \cdot 2^8}{2^6} = \frac{2^{11}}{2^6} = 2^5 = 32.$$

Мисал. $a = -5$ булганда $2a^3$ һәм $(2a)^3$ аңлатмаларының кыйммәтләрен табарга.

Чишү. $2a^3 = 2 \cdot (-5)^3 = 2 \cdot (-125) = -250$, $(2a)^3 = (2 \cdot (-5))^3 = (-10)^3 = -1000$.

3 нче зачет

1. Нәрсә ул дәрәҗә?
2. Дәрәҗәләрне тапкырлау кагыйдәсе.
3. Дәрәҗәләрне бүлү кагыйдәсе.
4. Дәрәҗәне дәрәҗәгә күтәрү кагыйдәсе.
5. Тапкырчыгышны дәрәҗәгә күтәрү кагыйдәсе.
6. Вакланманы дәрәҗәгә күтәрү кагыйдәсе.

"4" билгесе алу өчен өстәмә рәвештә тапкырчыгышны дәрәҗәгә күтәрү кагыйдәсен, ә "5" ле алу өчен вакланманы дәрәҗәгә күтәрү кагыйдәсен исбатларга кирәк.

3 нче контроль эш

1. Гамәлләрне эшләгез:

а) $a^{10} \cdot a^2$; б) $a^{10} : a^2$;
в) $(a^{10})^2$; г) $(ab)^{10}$.

2. Аңлатмаларның кыйммәтләрен табыгыз:

а) $\frac{3^5 (3^2)^{\text{[illegible]}}}{3^8}$, б) $2 \cdot 7^2 \cdot 0,34^0 - 3^4$,

в) $c = -12,\ 0,\ 12$ булганда, $3c^2 + 4$ нең.

§ 4. БЕРБУЫННАР

Сез инде аңлатмалар белән, үзгәрешлеләр белән таныштыгыз. Саннар һәм үзгәрешлеләрдән торучы һәм үзара гамәл тамгалары һәм җәяләр белән тоташкан язылышның үзгәрешлеле аңлатма дип аталуын исегезгә төшерәбез.

Үзгәрешлеле аңлатма теләсә нинди рәвештә язылырга мөмкин. $2a$, x, a^2+b, $\frac{x+y}{6}$, $7a^2yaxb$, ax^2+bx һ. б. барлык аңлатмалар арасыннан тапкырлаудан гына торганнарын сайлап алыйк.

Билгеләмә. Саннар, үзгәрешлеләр һәм аларның дәрәҗәләрен тапкырлаудан гына төзелгән аңлатма **бербуын** дип атала.

Бер генә хәрефтән торган аңлатма да бербуын булып санала. Бер генә саннан торган аңлатма да — бербуын.

Бербуыннарга мисаллар. $7a$, $a^2b^3c^4p$, $3{,}5xxyy$, $7{,}2a^2bc$, $1{,}15axy$, x, m, 4, $\frac{2}{3}$, $0{,}1$.

Бүлүне эченә алса да, $\frac{x}{3}$ аңлатмасы бербуын була. Аны түбәндәгечә язарга мөмкин: $\frac{x}{3}=\frac{1}{3}x$.

$a+b$, $7-x$, $\frac{x-y}{a}$, $\frac{9}{b}$, ab^2+c аңлатмалары, кушу һәм алу билгеләре ярдәмендә төзелгәнлектән, бербуын була алмыйлар. Ә $\frac{9}{b}$ аңлатмасын үзгәрешле белән санның тапкырчыгышы итеп күрсәтеп булмый.

Бербуынның язылышы бик кыска да, бик озын да булырга мөмкин. Мәсәлән, 7, a, x, $\frac{1}{4}$, $0{,}2$ һәм $4{,}2\ abc^3m$, $\frac{1}{3}\ xy^5\cdot abp$, $0{,}4a^2\cdot b^6c^3$, $12{,}873\ abcxypk$.

Барлык бербуыннарны ике төркемгә бүләргә мөмкин. Гамәлләрне эшләргә, ягъни гадиләштерергә мөмкин булган бербуыннар бар, мәсәлән, $2a\cdot 3$ бербуынын гадиләштереп була: $2a\cdot 3=6a$, $3b^2b^4$ бербуынын гадиләштереп була: $3b^2b^4=3b^6$, $(ax)^5$ бербуынын гадиләштереп була: $(ax)^5=a^5x^5$.

Гамәлләрне эшләп булмый, ягъни гадиләштереп булмый торган бербуыннар бар, мәсәлән, $7a$, 8, xy^6, $0{,}3abc^3yxpk$.

Билгеләмә. Гамәлләр эшләп булмый торган бербуын **стандарт рәвештәге** бербуын дип атала.

Андый бербуыннарга мисаллар: $3{,}8a^4bc^3$, a, ayx, ab.

Бербуынны гадиләштерү өчен гамәлләрне үтәү бербуынны стандарт рәвешкә китерү дип атала. Бербуынны стандарт рәвешкә китерү — мөмкин булган барлык гамәлләрне үтәү дигән сүз.

Мисал. Бербуыннарны стандарт рәвешкә китерергә: $5a \cdot 3$, $4m^3m^2a$, $(2ax)^5$.

Чишү. $5a \cdot 3 = 15a$, $4m^3m^2a = 4m^5a$, $(2ax)^5 = 2^5a^5x^5 = 32a^5x^5$.

Гадәттә, стандарт рәвештәге бербуында иң беренче булып сан языла.

Билгеләмә. Стандарт рәвештәге бербуын алдында торучы сан аның **коэффициенты** дип атала.

Мисаллар. Бербуыннар: $7a$; $3{,}4x^3y^7$; xy; $-a$.
Аларның коэффициентлары: 7; 3,4; 1; −1.

$2a^3b(-5a)$ бербуынында 2 саны коэффициент була алмый, чөнки бербуын стандарт рәвештә түгел. Коэффициентын табу өчен, бербуынны стандарт рәвешкә китерергә кирәк.

$2a^3b \cdot (-5a) = -10a^4b$, коэффициенты — 10 була.

m ны $1 \cdot m$ дип язып була, шуңлыктан m аңлатмасының коэффициенты 1 гә тигез.

$-a$ ны $-1 \cdot a$ дип язып булганлыктан, $-a$ ның коэффициенты −1 гә тигез.

Гадәттә, 1 һәм −1 коэффициентлары язылмый, ә бар дип уйланыла гына. Әгәр сез аларны язмыйсыз икән, бу ялгыш түгел. Шуңа күрә abc дип язу да, $1abc$ дип язу да, $-x$ та һәм $-1x$ та дөрес булыр.

Бербуын аңлатма булганлыктан, аның да, һәрбер аңлатманыкын тапкан кебек, санлы кыйммәтен табарга мөмкин.

Мисал. $x = -2, 0, 3$ булганда $2x^3$ бербуынының кыйммәтен табарга.

Чишү. $x = -2$ булганда $2 \cdot x^3 = 2 \cdot (-2)^3 = 2 \cdot (-8) = -16$,
$x = 0$ булганда $2x^3 = 2 \cdot (0)^3 = 2 \cdot 0 = 0$,
$x = 3$ булганда $2x^3 = 2 \cdot (3)^3 = 2 \cdot 27 = 54$.

БЕРБУЫННАР ӨСТЕНДӘ ГАМӘЛЛӘР

Бербуыннарны тапкырлау

Мисал. $2a^3b \cdot 3a^4b^2c$ бербуынын стандарт рәвешкә китерергә.

Чишү. Бу очракта ниләр эшләргә мөмкин соң? 2 не 3 кә тапкырларга, нигезләре бер үк булган дәрәҗәләрне тапкырларга мөмкин.

$$2 \cdot 3 = 6, \qquad a^3 \cdot a^4 = a^7, \qquad b \cdot b^2 = b^3$$

$2a^3b \cdot 3a^4b^2c = 6a^7b^3c$ — стандарт рәвеш.

Кагыйдә. *Бербуыннарны тапкырлау өчен аларның коэффициентларын һәм нигезләре бер үк булган дәрәҗәләрне тапкырларга кирәк.*

Нигезләре төрле булган дәрәҗәләрне тапкырларга ярамаганны онытмагыз.

Мисаллар. $7a \cdot 3b = 21ab$, $\quad 7a \cdot 3a = 21a^2$,
$5x^2y \cdot 2x = 10x^3y$, $\quad (-4a) \cdot (-3bc) = 12abc$.

Бербуыннарны бүлү

Мисал. $12a^5b : 4a^3$ бербуынын стандарт рәвешкә китерергә.

Чишү. Бу очракта 12 не 4 кә, нигезләре бер үк булган дәрәҗәләрне бүләргә мөмкин:

$$12 : 4 = 3, \quad a^5 : a^3 = a^2, \quad 12a^5b : 4a^3 = 3a^2b.$$

Кагыйдә. *Бербуыннарны бүлү өчен аларның коэффициентларын бүләргә һәм нигезләре бертөрле булган дәрәҗәләрне бүләргә кирәк.*

Мисаллар. $30m^5 : 5m = 6m^4$; $\quad 100a^3b^4 : 25a^3 = 4b^4$;
$0{,}1x : 0{,}01x = 10$.

Бүлүне вакланма рәвешендә дә язарга мөмкин, мәсәлән, $\frac{14ab^3}{2ab}$,

$\frac{14ab^3}{2ab} = 7b^2$.

Теләсә нинди бербуыннарны тапкырлау мөмкин булса да, бүлүне һәрвакыт үтәп булмый. Хәзергә без, бүлүчедә бүленүчедә булмаган үзгәрешлеләр булмаса һәм дәрәҗәләрне бүлеп булса гына бербуыннарны бүлүне эшләрбез.

$3ab : x$ очрагында бүлү гамәлен эшләргә ярамый, бары тик $\frac{3ab}{x}$ вакланмасы рәвешендә генә язарга мөмкин.

$\frac{5ab}{a^4}$ очрагында да бүлүне эшләп булмый, чөнки ваклаучының күрсәткече санаучыныкыннан зуррак.

Мисаллар. $2\frac{1}{3}a^2b \cdot 0{,}1a^5 = \frac{7}{30}a^7b$,

$$2\frac{1}{3} \cdot 0{,}1 = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{7}{30}, \quad a^2 \cdot a^5 = a^7.$$

Мисал. $\frac{3{,}75x^8}{0{,}2x} = 18{,}75x^7$.

$$3{,}75 : 0{,}2 = 37{,}5 : 2 = 18{,}75, \quad x^8 : x = x^7.$$

Бербуыннарны дәрәҗәгә күтәрү

Бербуыннарны дәрәҗәгә күтәрү тапкырчыгышны дәрәҗәгә күтәрү кагыйдәсе буенча үтәлә.

Кагыйдә. *Бербуынны дәрәҗәгә күтәрү өчен бербуынның һәр тапкырлаучысын шул дәрәҗәгә күтәрергә кирәк.*

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n.$$

М и с а л. $(3a^3b^4x)^2 = 3^2a^6b^8x^2 = 9a^6b^8x^2$.
М и с а л. $(-2a^2b)^3 \cdot (3ab^2)^2 = -8a^6b^3 \cdot 9a^2b^4 = -72a^8b^7$.
М и с а л. $(2a^2b^5)^4 : (2ab^3)^2 = 16a^8b^{20} : 4a^2b^6 = 4a^6b^{14}$.

Бербуыннарны кушу һәм алу

М и с а л л а р. $2x + 3x = 5x$, $7a^2 + 10a^2 = 17a^2$.

Барлык бербуыннарны да кушарга мөмкинме? Юк, барысын д түгел. Коэффициентлары белән генә аерылып торган бербуыннар ны гына кушарга мөмкин.

Билгеләмә. Бер үк төрле, ләкин коэффициентлары гына төрлеч булган бербуыннар **охшаш бербуыннар** дип атала.

Охшаш бербуыннарга мисаллар: $2a$ һәм $-10{,}1a$, $4x^5y$ һәм $2x^5y$ $0{,}1m^4np$ һәм $100m^4np$.

$2a$ һәм $3a^2$ охшаш бербуыннар түгел, чөнки аларда a ны дәрәҗәләре төрлечә.

$3x^5$ һәм $3x^4$ бербуыннары охшаш түгел, чөнки x ның дәрәҗәс төрле. $4a$ һәм $5ab$ да охшаш түгел, чөнки аларның хәрефле өлешләр төрле.

Бары тик охшаш бербуыннарны гына кушарга яки алырга мөмкин Бербуыннарны кушу һәм алу **охшаш буыннарны берләштерү** ди атала.

М и с а л. $2a + 5a$ ны берләштерегез.
Ч и ш ү. $2a + 5a = 7a$.
М и с а л. Берләштерегез: $5x^2y - 2x^2y$.
Чишү. $5x^2y - 2x^2y = 3x^2y$.

Кагыйдә. *Охшаш бербуыннарны кушу (яки алу) өчен, аларны коэффициентларын кушарга (яки алырга) һәм үзгәрешлеләре үзгәрешсез язып куярга кирәк.*

М и с а л л а р. $2x + 10x = 12x$, $13a^2 - 10a^2 = 3a^2$.

Исегездә тотыгыз: кушканда яки алганда бербуыннарның хәрефл **өлеше үзгәрми**.

М и с а л. $2x + 5x + x = 8x$.
Коэффициентларны кушабыз: $2 + 5 + 1 = 8$
М и с а л. $10y - y = 9y$.
Коэффициентларны алабыз: $10 - 1 = 9$.

4 нче зачет

1. Нәрсә ул бербуын?
2. Нинди бербуынны стандарт рәвештәге бербуын диләр?
3. Нәрсә ул бербуынның коэффициенты?
4. Бербуыннарны тапкырлау кагыйдәсе.
5. Бербуыннарны бүлү кагыйдәсе.

6. Бербуыннарны дәрәҗәгә күтәрү кагыйдәсе.
7. Нинди бербуыннар охшаш була?
8. Охшаш бербуыннарны кушу һәм алу кагыйдәсе.

4 нче контроль эш

1. Бербуыннарны стандарт рәвешкә китерегез:

а) $1{,}2ab^2 \cdot 5ab^6$, б) $12n^3p : 3n^2p$, в) $(3a^3b)^4$.

2. Охшаш кушылучыларны берләштерегез:
а) $2a + 3a - 4a + 5a - 6a$,
б) $8{,}1x^3y - 7{,}2x^3y + 4{,}2x^3y$.

3. $a = -\frac{1}{3}$, 0, 0,2, 4 булганда $3a^2$ бербуынының кыйммәтләрен табыгыз.

§ 5. БЕРДӘЙЛЕКЛӘР ҺӘМ ТИГЕЗЛӘМӘЛӘР

Сез инде санлы аңлатмалар һәм үзгәрешлеле аңлатмалар белән таныштыгыз. Әгәр теләсә нинди ике аңлатманы "=" тамгасы белән тоташтырсак, тигезлек килеп чыга.

Тигезлекләргә мисаллар: $2 + 2 = 4$, $x^2 + y^2 + 2xy = 100$, $3 - x = 8$, $7 + a = b$.

Тигезлекләр дөрес һәм ялган булырга мөмкин.

Дөрес тигезлекләр: $2 + 3 = 5$, $6 \cdot 3 = 18$.

Дөрес булмаган тигезлекләр: $2 + 2 = 5$, $14 : 2 = 10$.

Билгеләмә. Билгесезне эченә алган тигезлек **тигезләмә** дип атала.

Тигезләмәгә мисаллар: $321 + x = 400$, $2{,}3ab = 7a + c$, $3 + 0{,}6 = 3{,}6$ — тигезләмә була алмый. Бу тигезлектә үзгәрешле юк. $3a + 8$ — тигезләмә түгел, чөнки ул тигезлек түгел.

Тигезләмәләрне чишәләр, ягъни үзгәрешленең нинди кыйммәтләре өчен тигезләмә дөрес тигезлеккә әйләнә икәнлекне билгелиләр.

Мисал. $3 + a = 10$.

$a = 7$ булганда дөрес тигезлек килеп чыгуына ышану җиңел. 7 саны тигезләмәнең **тамыры** дип атала.

Билгеләмә. Үзгәрешленең тигезләмәне дөрес тигезлеккә әйләндерә торган кыйммәте **тигезләмәнең тамыры** дип атала.

Бирелгән санның тигезләмәнең тамыры икәнлеген тикшерү өчен бу санны тигезләмәгә куеп карарга һәм гамәлләрне эшләргә кирәк. Дөрес тигезлек килеп чыкса — бу сан **тамыр** дигән сүз. Дөрес булмаган тигезлек табылса, тамыр була алмый.

Мисал. 5 саны $3x + 8 = 23$ тигезләмәсенең тамыры булырмы?

Чишү. Тигезләмәнең сул ягына x урынына 5 санын куябыз:

$$3x + 8 = 3 \cdot 5 + 8 = 15 + 8 = 23.$$

Тигезлекнең ике ягында да 23 килеп чыкты, димәк, 5 саны — тамыр.

Мисал. 3 саны $5x - 8 = 12$ тигезләмәсенең тамыры булырмы?

Чишү: Тигезләмәнең сул ягына x урынына 3 не куябыз.

$$5 \cdot 3 - 8 = 15 - 8 = 7.$$

7 саны шарттагы 12 санына тигез түгел, димәк, 3 саны бирелгән тигезләмәнең тамыры түгел.

Тигезләмәне чишү — аның барлык тамырларын табу яки тамырларының булмавын исбат итү дигән сүз.

Билгеләмә. Үзгәрешлеләрнең теләсә нинди кыйммәтләре өчен дә дөрес булган тигезлек **бердәйлек** дип атала. Барлык санлы тигезлекләр бердәйлекләр дип саналалар.

Бердәйлекләргә мисаллар: $a + a = 2a$, $\quad 2 + 2 = 4,$
$0 \cdot x = 0,$ $\quad 7 \cdot 3 = 21,$
$a + b = b + a,$ $\quad 100 : 2 = 50.$

$a + a = 2a$ бердәйлеген җентекләбрәк карыйк. Ул, чынлап та, бердәйлек, чөнки a урынына, тигезлекнең ике ягына да нинди генә сан куеп карасак та, һәрвакытта да бер үк сан килеп чыгар.

	сул як	уң як
$a = 10$ булса,	$a + a = 10 + 10 = 20,$	$2 \cdot a = 2 \cdot 10 = 20,$
$a = -3$ булса,	$a + a = -3 + (-3) = -6,$	$2 \cdot a = 2 \cdot (-3) = -6,$
$a = 0$ булса,	$a + a = 0 + 0 = 0,$	$2 \cdot a = 2 \cdot 0 = 0.$

Ә инде икенче яктан карасак, бу тигезлек a һәм a охшаш кушылучыларны берләштерү нәтиҗәсе.

Мондый тигезлекләрнең ике ягы да бердәй рәвештә тигез диләр. Бер аңлатманы аңа бердәй тигез булган икенче аңлатма белән алыштыруны бердәй үзгәртү дип атыйлар. Бердәй үзгәртүләр саннар өстендә гамәлләрнең үзлекләре буенча үтәлә.

Тигезләмәләрне чишү

Мисал. $4x - 8 = 2x + 14$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Тигезләмәнең ике ягына да $(-2x)$ ны кушабыз. Әгәр дөрес тигезлекнең ике ягына да бер үк санны кушсак, дөрес тигезлек килеп чыгар. Тигезлек хәлендәге үлчәүнең ике ягына да бер үк авырлыктагы герләр куйсак, тигезлек бозылмас.

$4x - 8 - 2x = 2x + 14 - 2x$, ләкин $2x - 2x = 0$ һәм $4x - 8 - 2x = 14$.

Ике якка да + 8 не кушыйк:

$4x - 8 - 2x + 8 = 14 + 8$, ләкин $-8 + 8 = 0$ һәм $4x - 2x = 14 + 8$.

Нәрсә килеп чыкты соң? Без тигезлекнең ике ягына да $(-2x)$ һәм 8 не кушкан идек, $2x$ капма-каршы тамгасы белән уң яктан сул якка, ә 8 саны, шулай ук капма-каршы тамгасы белән сул яктан уң якка күчкән булып чыкты.

$4x - 8 = 2x + 14$ тигезләмәсе $4x - 2x = 14 + 8$ гә әйләнде. $4x$ һәм 14 үз урыннарында үз тамгалары белән калдылар.

Ике якны да гадиләштерәбез: $4x - 2x = 2x$, $14 + 8 = 22$. Тигезләмә $2x = 22$ гә әверелде. Ике якны да 2 гә бүләбез: $x = 22 : 2$.

Кагыйдә. Тигезләмәне чишү өчен түбәндәгеләрне эшләргә кирәк:

1. *Барлык билгелеләрне, тамгаларын үзгәртеп, бер якка, билгесезләрне икенче якка күчерергә.*
2. *Ике якны да гадиләштерергә.*
3. *Килеп чыккан гади тигезләмәне чишәргә.*

Мисал. $6x - 1 = 19 + x$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Күчерелми калучы кушылучыларның астына сызыйк:

$$\underline{6x} - 1 = \underline{19} + x.$$

-1 не, тамгасын "−" тан "+" ка әйләндереп, уң якка күчерәбез. x ны, тамгасын "+" тан "−" ка әйләндереп, сул якка күчерәбез. $6x - x = 19 + 1$.

Ике якны да гадиләштерәбез: $5x = 20$, $x = 20 : 5$, $x = 4$.

Язу өчен үрнәк:

Мисал. Тигезләмәне чишәргә:

$$-\underline{7x} + 8 = \underline{18} - 2x$$
$$-7x + 2x = 18 - 8,$$
$$-5x = 10,$$
$$x = 10 : (-5),$$
$$x = -2.$$

Тигезләмәләрне мәсьәләләр чишү өчен кулланалар. Башта билгесез санны хәреф белән билгелиләр, аннан соң мәсьәләнең шарты буенча тигезләмә төзиләр һәм чишәләр.

Мисал. Бер сан икенчесеннән 4 тапкыр зуррак, ә аларның суммасы 100 гә тигез. Бу саннарны табарга.

Чишү. x — кечерәк сан булсын. Димәк, икенчесе $4x$ була.

Тигезләмә:

$$x + 4x = 100$$
$$5x = 100$$
$$x = 20 \qquad 4 \cdot 20 = 80.$$

Җавап: 20 һәм 80.

Мисал. Бер сан икенчесеннән 12 гә зуррак, ә аларның суммасы 50 гә тигез. Бу саннарны табарга.

Чишү. Кечерәк сан x булса, зуррагы $x + 12$ булыр.

Тигезләмә:

$$x + x + 12 = 50$$
$$x + x = 50 - 12$$
$$2x = 38$$
$$x = 38 : 2$$
$$x = 19, \quad 19 + 12 = 31.$$

Җавап: 19 һәм 31.

Мисал. Энесендә абыйсыныкыннан 4 тапкыр кимрәк акча бар. Әгәр абыйсы энесенә 90 тиен бирсә, аларның акчалары тигезләшә. Малайларның һәрберсендә күпмешәр акча булган?

Чишү. Энесенең акчасын x тиен дип билгеләсәк, абыйсында $4x$ тиен акча булыр.

Абыйсы 90 тиен бирә һәм аңарда $4x - 90$ тиен акча кала. Энесе 90 тиен ала һәм аңарда $x + 90$ тиен акча була. Алар үзара тигез.

Тигезләмә:

$$4x - 90 = x + 90$$
$$4x - x = 90 + 90$$
$$3x = 180$$
$$x = 180 : 3$$
$$x = 60, \quad 60 \cdot 4 = 240.$$

Җавап: 60 тиен һәм 2 сум 40 тиен.

Бу мәсьәләнең язылышын башкача да күрсәтергә мөмкин иде:

	Элек	Бирде яки алды	Хәзер
Энесе	x	90	$x + 90$
Абыйсы	$4x$	90	$4x - 90$

Тигезләмә:

$$4x - 90 = x + 90.$$

Мисал. Шүрлек, өстәл һәм урындык 720 сум тора. Урындык шүрлектән 20 сумга, һәм өстәл шүрлектән 5 тапкыр кыйммәтрәк тора. Һәрберсе ничәшәр сум тора?

Чишү. Гадәттә, иң арзан әйберне x хәрефе белән билгелиләр. Бу очракта иң арзаны — шүрлек. Аның бәясен x сум дип билгелик. Димәк, урындык $x + 20$ сум, өстәл $5x$ сум тора.

Тигезләмә:

$$x + x + 20 + 5x = 720.$$
$$x + x + 5x = 720 - 20$$
$$7x = 700$$
$$x = 700 : 7$$
$$x = 100.$$

Җавап: 100 сум, 120 сум, 500 сум.

5 нче зачет

1. Нәрсә ул тигезләмә?
2. Нәрсә ул бердәйлек?
3. "Тигезләмәне чишү" нәрсәне аңлата?
4. Тигезләмәләрне чишү кагыйдәсе.

5 нче контроль эш

1. Тигезләмәләрне чишәргә:

а) $14 - y = 19 - 11y$

б) $0{,}5x + 11 = 4 - 3x$

в) $6x - 7x + 12 = 10x$

2. Өч мәктәптә барлыгы 2000 укучы бар. Беренче мәктәптә икенчесеннән 400 укучыга артыграк, ә өченче мәктәптә укучылар икенчесендәгедән 6 тапкырга артыграк. Һәр мәктәптә ничәшәр укучы укый?

§ 6. ФУНКЦИЯ

Кешеләр тормышында бар нәрсә дә үзара бәйләнгән. Һава торышына карап, без итекләр яки туфлиләр киябез. Эшебезгә карап хезмәт хакын алабыз. Алгебра да бәйлелекләрне өйрәнә. Мисаллар карап үтик.

1 нче мисал. Кибеттә күп төрле товарлар бар. Һәр товарның үз бәясе бар. Һәр төр товарның бәясе бары бер генә. Бәясез товар юк.

2 нче мисал. Класста укучылар күп. Һәр укучының исеме бар. Һәр укучының бер генә исеме бар. Исемсез укучы юк.

3 нче мисал.

x	1	0	2	10	−1	−3	100
$2x+1$	3	1	5	21	−1	−5	201

Беренче юлда x ның кыйммәтләре күплеге язылган. x ның һәрбер кыйммәтенә $2x + 1$ аңлатмасының бары бер генә кыйммәте туры килә. x ның кыйммәте булып та, аңлатманың кыйммәте булмаган очрак юк.

Бу мисалларда ике күплек бар иде:
беренче мисалда товарлар һәм бәяләр күплекләре;
икенче мисалда укучылар һәм аларның исемнәре күплекләре;
өченче мисалда x ның һәм $2x + 1$ аңлатмасының кыйммәтләре күплекләре.

Барлык мисалларда да һәр төр товарга, укучыга, x ның кыйммәтенә бары тик бер генә бәя, исем, $2x + 1$ нең кыйммәте туры килә.

Билгеләмә. Беренче күплекнең һәрбер элементына икенче күплекнең бердәнбер элементы туры килсә, бу ике күплекнең элементлары арасындагы бәйлелек **функция** дип атала. Беренче күплек функциянең **билгеләнү өлкәсе** дип атала. Икенче күплек функциянең **кыйммәтләре өлкәсе** дип атала.

Өченче мисалда билгеләнү өлкәсе булып 1, 0, 2, 10, − 1, − 3, 100 саннары, кыйммәтләре өлкәсе булып 3, 1, 5, 21, − 1, − 5, 201 саннары тора.

Билгеләмәдә иң әһәмиятле сүзләр —"һәрбер" һәм "бердәнбер" сүзләре. Безнең сыйныфтагы урындыклар белән укучылар арасындагы бәйлелек функция була алмый, чөнки класста беркем дә утырмый торган урындык бар. Бу бәйлелек функция булсын өчен һәрбер урындыкта бердәнбер укучы утырып торырга тиеш

Мәктәптәге түгәрәкләр һәм секцияләр белән укучылар арасындагы бәйлелек тә функция түгел, чөнки берьюлы берничә түгәрәккә йөрүче укучылар бар.

Гадәттә функцияләр формулалар белән бирелә.

Мисал. Функция $y = 3x + 2$ формуласы белән бирелгән. Әгәр функциянең билгеләнү өлкәсе таблица ярдәмендә бирелсә, кыйммәтләр өлкәсен табарга.

x	0	1	3	4	10	− 1
y						

Чишү. Әгәр функция формула белән бирелсә, x ның кыйммәте буенча, аңлатманың кыйммәтен тапкандагы кебек y ның кыйммәтен табу өчен закон бирелгән дигән сүз.

$x = 0$ булса, $y = 3x + 2 = 3 \cdot 0 + 2 = 0 + 2 = 2$ һ.б.

Таблицаны тутырып язабыз:

x	0	1	3	4	10	− 1
y	2	5	11	14	32	− 1

Җавап: функциянең кыйммәтләре өлкәсе − 2, 5, 11, 14, 32, −1 саннары.

Беренче юл безгә бирелгән иде. Икенче юлны x ның нинди кыйммәте бирелүгә бәйле рәвештә, формула буенча таптык.

Билгеләмә. Бәйсез x үзгәрешлесе **аргумент** дип атала.

Билгеләмә. Бәйле y үзгәрешлесе **функция** дип атала.

Мисал. Функция $y = 5x + 1$ формуласы белән бирелгән. Аргументның кыйммәте 3 булганда, функциянең кыйммәтен табарга.

Чишү. Формулага x урынына 3 санын куйыйк.

$$y = 5x + 1 = 5 \cdot 3 + 1 = 15 + 1 = 16.$$

Җавап: $y = 16$.

Мисал. Функция $y = 7x - 8$ формуласы белән бирелгән. Функциянең 55 кә тигез кыйммәтенә тиңдәш булган аргументның кыйммәтен табарга.

Чишү. Бу — кире мәсьәлә. y урынына 55 санын куйыйк.

$55 = 7x - 8$ тигезләмәсен таптык. Чишәбез:

$55 + 8 = 7x$.

$63 = 7x$

$x = 63 : 7$

$x = 9$

Җавап: $x = 9$.

Мисал. Функция $y = 0{,}1x$ формуласы белән бирелгән. Таблицаның буш шакмакларын тутырып бетерергә.

x	2		10	
y		2		− 10

Чишү. $x = 2$ булганда, $y = 0{,}1x = 0{,}1 \cdot 2 = 0{,}2$.

$x = 10$ булганда, $y = 0{,}1x = 0{,}1 \cdot 10 = 1$.

Кире мәсьәлә

$2 = 0{,}1x$ $\quad$ $-10 = 0{,}1x$

$x = 2 : 0{,}1$ $\quad$ $x = (-10) : 0{,}1$

$x = 20$ $\quad$ $x = -100$

Җавап:

x	2	20	10	− 100
y	0,2	2	1	− 10

Мисал. $y = 3x + 2$ функциясенең билгеләнү өлкәсен табарга.

Чишү. Билгеләнү өлкәсен табу — формулага x урынына куярга мөмкин булган кыйммәтләрне табу дигән сүз. Уңай саннарны куярга мөмкинме?

$x = 3$ булсын, $y = 3x + 2 = 3 \cdot 3 + 2 = 9 + 2 = 11$. Мөмкин.

Тискәре саннарны куярга мөмкинме?

$x = -3$ булсын, $y = 3x + 2 = 3 \cdot (-3) + 2 = -9 + 2 = -7$. Мөмкин.

0 не куярга мөмкинме?

$x = 0$ булсын, $y = 3 \cdot 0 + 2 = 0 + 2 = 2$. Мөмкин.

Җавап: x — теләсә нинди сан.

Мисал. $y = \frac{5x-1}{x-5}$ функциясенең билгеләнү өлкәсен табарга.

Чишү. $x = 5$ булганда, $y = \frac{5 \cdot 5 - 1}{5 - 5} = 24 : 0$. Нульгә бүләргә ярамый.

Җавап: x – 5 тән башка теләсә нинди сан.

Кайсы саннарның кирәксезлеген ничек билгеләргә соң? Беренче мисалда ваклаучысында билгесез булган вакланма юк иде. Җавапта барлык саннарны алдык. Кирәксез 5 саны икенче мисалда табылды. Бу санны куйганнан соң ваклаучы нульгә әйләнә, ә нульгә бүләргә ярамый.

Кагыйдә. *Функциянең билгеләнү өлкәсен табу өчен ваклау-чыны нульгә тигезләргә һәм бу тигезләмәне чишәргә кирәк. Бу тигезләмәнең тамырларыннан башка барлык саннар билгеләну өлкәсе булалар.*

Әгәр функциянең формуласында билгесез сан кергән ваклаучы булмаса, билгеләнү өлкәсе булып барлык саннар санала.

Мисал. $y = \frac{2x-3}{x+8}$ функциясенең билгеләнү өлкәсен табарга.

Чишү. Ваклаучыны нульгә тигезлибез: $x + 8 = 0$. Тигезләмәне чишәбез: $x = -8$.

Җавап. x -8 дән үзгә теләсә нинди сан

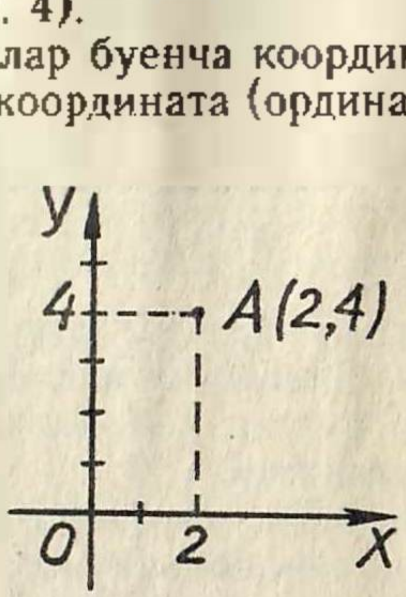
Функцияләрнең графиклары

Математикадан кайбер мәгълүматларны искә төшерик. Үзара перпендикуляр булган ике туры сызыйк. Болар — координаталар күчәрләре. x лар күчәре горизонталь, ә y лар күчәре вертикаль урнашкан (рәс. 3).

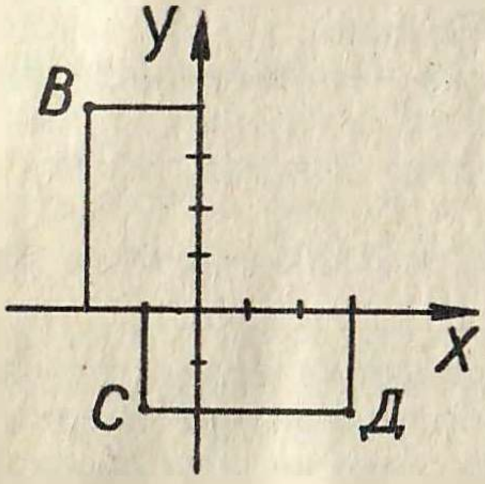
Координаталар яссылыгында $A(2,4)$ ноктасын төзү өчен коорди-наталар башлангычыннан уңга таба 2 берәмлеккә, ә аннары өскә таба 4 берәмлеккә күчәргә кирәк (рәс. 4).

Җәяләр эчендә беренче урында x лар буенча координата (абс-цисса), ә икенче урында y лар буенча координата (ордината) языла (рәс. 5 һәм 6).

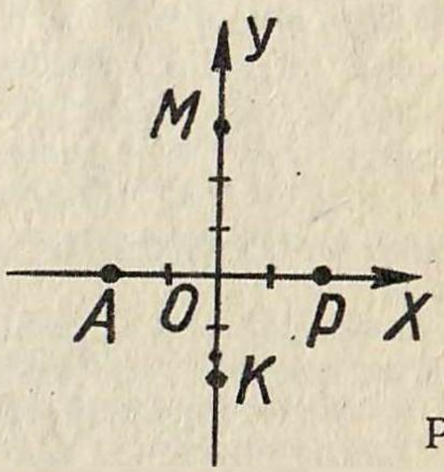
Рәс. 3



Рәс. 4



Рәс. 5



Рәс. 6

$B(-2, 4)$; $C(-1, -2)$; $Д(3, -2)$ $A(-2, 0)$; $M(0, 3)$; $P(2, 0)$; $K(0, -2)$.

М и с а л. Функция $y = 2x - 3$ формуласы белән бирелгән. Башта таблицаны тутырып, графигын төзергә.

x	0	1	2	3	4
y					

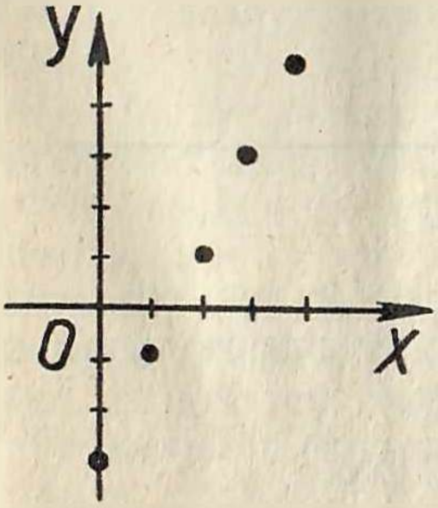
Ч и ш ү. $x = 0$ булганда, $y = 2x - 3 = 2 \cdot 0 - 3 = 0 - 3 = -3$ һ.б.

Табабыз:

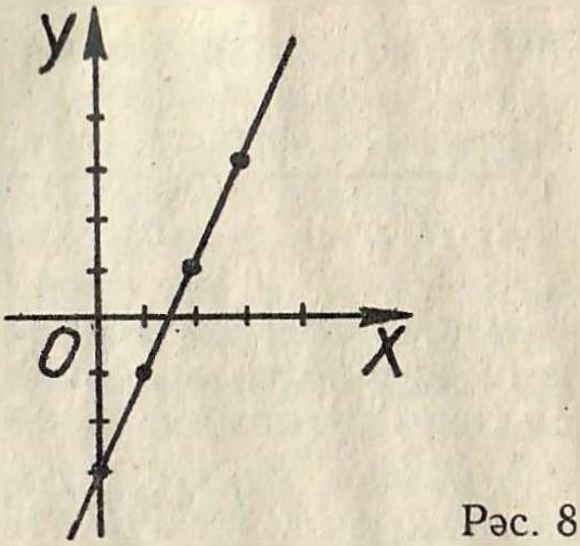
x	0	1	2	3	4
y	-3	-1	1	3	5

Күчәрләрне сызабыз һәм $(0, -3)$, $(1, -1)$, $(2, 1)$, $(3, 3)$, $(4, 5)$ нокталарын төзибез (рәс. 7).

Бу нокталарны тоташтырабыз. Туры сызык килеп чыгар, ул функциянең графигы дип атала (рәс. 8).



Рәс. 7



Рәс. 8

М и с а л. $y = 5 - x$ функциясенең графигын төзергә.

Ч и ш ү. Үзебез x ның берничә кыйммәтен алабыз.

Таблица төзибез.

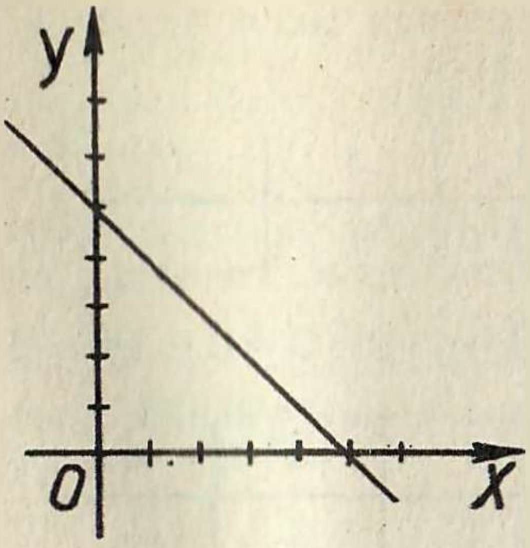
x	-2	0	1	2	3
y					

$x = -2$ булганда, $y = 5 - x = 5 - (-2) = 5 + 2 = 7$ һ.б.

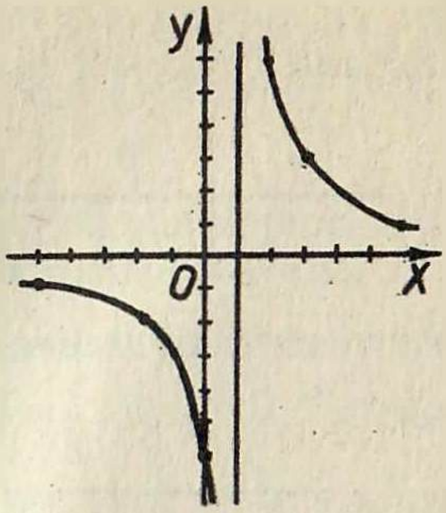
x	-2	0	1	2	3
y	7	5	4	3	2

Нокталар төзибез һәм тоташтырабыз (рәс. 9).

$y = 5 - x$ функциясенең билгеләнү өлкәсе булып барлык саннар күплеге санала. Шуңа күрә беренче юлда x ка теләсә нинди кыйммәтләр бирергә мөмкин (шулай да бик зур кыйммәтләр түгел).



Рәс. 9



Рәс. 10

Мисал. $y = \frac{6}{x-1}$ функциясенең графигын төзергә.

Чишү. Билгеләнү өлкәсен эзлибез: $x - 1 = 0$, $x = 1$.

Билгеләнү өлкәсе: $x = 1$ дән башка теләсә нинди сан. xның берничә кыйммәтен алабыз, ләкин 1 не алырга ярамый. Таблица төзибез.

x	-5	-2	-1	0	2	3
y						

Беренче юлда 1 дән башка теләсә нинди саннар булырга мөмкин. Шулай да y бөтен сан килеп чыгарлык саннар алырга тырышыйк. Таблицаны тутырабыз. $x = -5$ булганда,

$$y = \frac{6}{x-1} = \frac{6}{-5-1} = \frac{6}{-6} = -1 \text{ h.б.}$$

x	-5	-2	-1	0	2	3
y	-1	-2	-3	-6	6	3

Координаталар күчәрен сызыйк. xның 1 гә тигез була алмавын искә төшерик. Бу исә xның 1 гә тигез булган кыйммәтенә yның кыйммәте тиңдәш була алмый дигән сүз. xлар күчәренең 1 ноктасыннан вертикаль сызык сызыйк. График бу сызыкны кисеп үтәргә тиеш түгел.

Ноктәлар төзибез һәм аларны тоташтырабыз (рәс. 10).

График буенча функциянең һәм аргументның кыйммәтләрен табарга мөмкин.

Мисал. $y = \frac{12}{x}$ функциясенең графигы бирелгән. График буенча табыгыз:

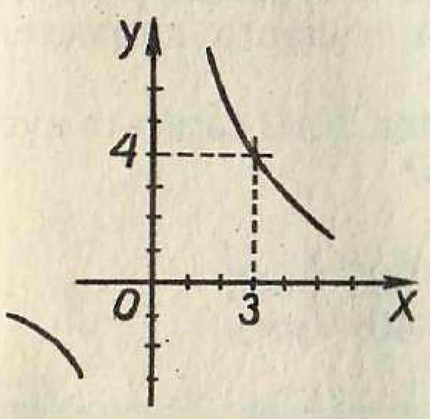
а) аргументның кыйммәте 3 булганда, функциянең кыйммәтен;

б) функциянең кыйммәте 6 булганда, аргументның кыйммәтен.

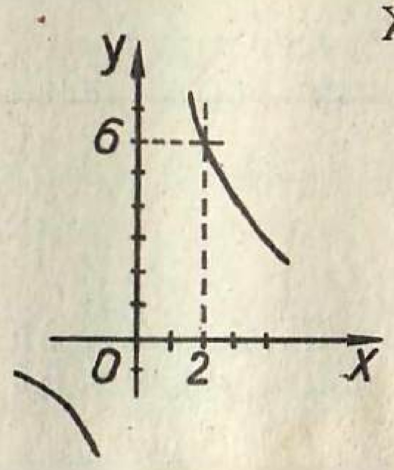
Чишү. а) x лар күчәрендә 3 ноктасын билгелибез. Аңардан графикка кадәр вертикаль сызык үткәрәбез. Кисешү ноктасыннан y лар күчәренә кадәр горизонталь сызык сызабыз. 4 ноктасын таптык (рәс. 11). Җавап: 4.

б) y лар күчәрендә 6 ноктасын таптык. Аңардан графикка кадәр горизонталь сызык үткәрәбез. Кисешү ноктасыннан x лар күчәренә кадәр вертикаль сызык үткәрәбез. 2 ноктасын таптык (рәс. 12).

Җавап: 2.



Рәс. 11



Рәс. 12

Мисал. Функция $y = 5x + 6$ формуласы белән бирелгән. M (38, 194) һәм P (28, 146) нокталары бу функциянең графигында ятамы?

Чишү. Бу мәсьәләдә координаталар шактый зур булганлыктан, график төзү кыен. Мәсьәләне икенче төрле итеп чишик.

Функциянең формуласына x урынына 38 санын куйыйк: $x = 38$ булганда, $y = 5x + 6 = 5 \cdot 38 + 6 = 190 + 6 = 196$, ә M ноктасының ординатасы 194 саны. Димәк, M ноктасы график өстендә ятмый. Ордината 194 кә тигез, ә безнең исәпләүләрдә 196 килеп чыкты, димәк, M ноктасы графиктан өстәрәк ята.

Функциянең формуласына x урынына 28 санын куйыйк: $x = 28$ булганда, $y = 5 \cdot x + 6 = 5 \cdot 28 + 6 = 140 + 6 = 146$, P ноктасының да ординатасы 146 га тигез. Димәк, P ноктасы график өстендә ята.

6 нчы зачет

1. Нәрсә ул функция?
2. Нәрсә ул функциянең билгеләнү өлкәсе?
3. Нәрсә ул функциянең кыйммәтләре өлкәсе?
4. Функциянең билгеләнү өлкәсен табу кагыйдәсе.

6 нчы контроль эш

1. Функция $y = 4x - 11$ формуласы белән бирелгән. $x = -2, 0, 12$ булганда, функциянең кыйммәтләрен табыгыз.

2. Функция $y = 5 - 3x$ формуласы белән бирелгән. $y = 20, -7, 0$ булганда, аргументның кыйммәтләрен табыгыз.

3. $y = x - 7$ функциясенең графигын төзегез.

4. $y = 0{,}4x$ функциясенең графигы өстендә $A(45, 18)$, $B(62, 25)$, $C(100, 40)$ нокталары ятырмы?

§ 7. ТУРЫ ПРОПОРЦИОНАЛЬЛЕК

Мисал. 1 м тукыманың бәясе 3 сум тора. Шундый 5 м тукыманың бәясе күпме торыр? 6 м, 10 м, a м?

Чишү. Тукыма бәясен y сум дип билгелик.

$$y = 3 \cdot 5 = 15 \text{ (сум)}, \quad y = 3 \cdot 10 = 30 \text{ (сум)},$$
$$y = 3 \cdot 6 = 18 \text{ (сум)}, \quad y = 3 \cdot a = 3a \text{ (сум)}.$$

Тукыма бәясен табу өчен 3 не метрлар санына тапкырларга кирәк. Күбрәк тукыма сатып алган саен, күбрәк түләргә кирәклеген искәртик.

Мисал. Автомобильнең тизлеге 40 км/сәг. Ул 2 сәгатьтә күпме юл үтәр? 3 сәгатьтә? 5 сәгатьтә? x сәгатьтә?

Чишү. Узган юлны S дип билгелик.

$$S = 40 \cdot 2 = 80 \text{ (км)}, \quad S = 40 \cdot 5 = 200 \text{ (км)},$$
$$S = 40 \cdot 3 = 120 \text{ (км)}, \quad S = 40 \cdot x = 40x \text{ (км)}.$$

Үтелгән юлны табу өчен 40 ны сәгатьләр санына тапкырларга кирәк. Автомобильнең, юлда озаграк барган саен, күбрәк юл үткәнен искәртик.

Мисал. 1 сәгатьтә класс 20 үсенте утырта ала. 2 сәгатьтә, 3, 4, b сәгатьтә класс ничә агач үсентесе утыртыр?

Чишү. Агач үсентеләре санын k дип билгелик.

$$k = 20 \cdot 2 = 40, \quad k = 20 \cdot 4 = 80,$$
$$k = 20 \cdot 3 = 60, \quad k = 20 \cdot b = 20b.$$

Үсентеләр санын табу өчен 20 не сәгатьләр санына тапкырларга кирәк. Шунысын искәртик: үсентеләрне озаграк утырткан саен, аларның саны күбрәк булыр.

Күргәнебезчә, бер зурлыкны берничә тапкыр арттырганда, икенче зурлыкта шуның кадәр үк арта торган бәйләнешләр була. Өч мисалда да формулалар бертөрлерәк. Беренче мисалда $y = 3a$ формуласы, икенчесендә $s = 40x$, өченчесендә $k = 20b$ формуласы булды. Өч мисалда да җавапны табу өчен, бәйсез үзгәрешлене бер үк санга тапкырларга кирәк иде. Беренче очракта бу сан 3 кә, икенчесендә 40 ка, өченчесендә 20 гә тигез булды.

Билгеләмә. $y = kx$ рәвешендәге функция (биредә k — нульгә тигез булмаган даими сан) **туры пропорциональлек** дип атала.

Туры пропорциональлеккә мисаллар: $y = 100x$, биредә $k = 100$;

$y = -2x$, $k = 2$; $y = 0{,}0003x$, $k = 0{,}0003$;

$y = \frac{3}{4}x$, $k = \frac{3}{4}$, $p = 8a$, $k = 8$.

Мисал. $y = \frac{10}{x}$ — туры пропорциональлек түгел, чөнки функциянең рәвеше башка төрле. $y = 10x + 1$ һәм $y = x^2$ — шулай ук туры пропорциональлек түгел.

Туры пропорциональлекнең үзлекләре

1. Бәйсез үзгәрешлене ничә тапкыр зурайтсак, функция дә шул ук тапкыр зурая.

2. Бәйсез үзгәрешлене ничә тапкыр кечерәйтсәк, функция дә шул ук тапкыр кечерәя.

Мисал. 5 м тукыма 28 сум тора. Шундый ук 6 м тукыма ничә сум торыр?

Чишү. 1 нче юл. 1) $28 : 5 = 5{,}6$ (сум), 1 м тукыма бәясе.
2) $5{,}6 \cdot 6 = 33{,}6$ (сум).

Җавап: 33 сум 60 тиен.

2 нче юл. 1) $6 : 5 = 1{,}2$; 6 м тукыма 5 м лыдан 1,2 тапкыр зуррак;
2) $28 \cdot 1{,}2 = 33{,}6$ (сум).

3 нче юл. Пропорциянең төп үзлеген искә төшерик. Кырый буыннар тапкырчыгышы урта буыннар тапкырчыгышына тигез.

Ике юлга язабыз: 5 м → 28 сум
6 м → x сум

Урта һәм кырый буыннарны тапкырлыйбыз:

$5x = 28 \cdot 6$. Моннан $x = \frac{28 \cdot 6}{5}$; $x = 33{,}6$.

Туры пропорциональлекнең графигы

Мисал. $y = 3x$ функциясенең графигын төзергә.

Чишү. Берничә сан сайлап алыйк һәм таблица төзик.

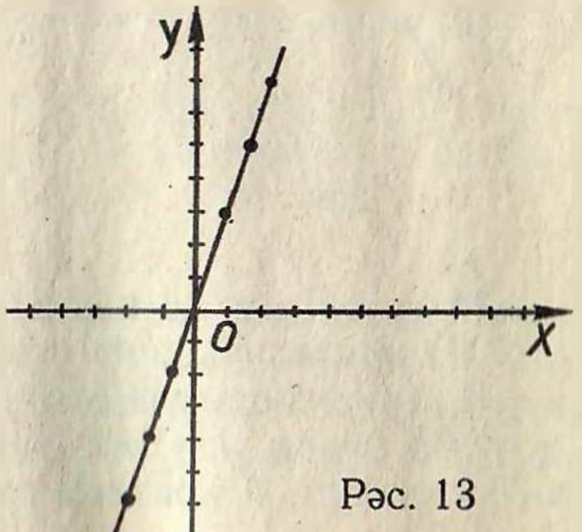
x	-2	-1	0	1	2
y					

Таблицаны тутырабыз: $x = -2$ булганда, $y = 3x = 3(-2) = -6$ һ.б.ш.

x	-2	-1	0	1	2
y	-6	-3	0	3	6

Координаталар күчәрен сызабыз һәм графигын төзибез (рәс. 13).

Координаталар башлангычы аша узучы туры сызык килеп чыкты. Теләсә нинди туры пропорциональлек графигының координаталар башлангычы аша узуын исбатлыйк.



Рәс. 13

Исбатлау.

Туры пропорциональлекнең формуласы $y = kx$. Координаталар башлангычында абсцисса 0 га тигез. 0 не теләсә нинди k санына тапкырласак та, җавапта 0 килеп чыгар. Димәк, график $O(0, 0)$ ноктасы аша үтә, шуны исбатларга кирәк иде дә.

Геометриядән белгәнебезчә, туры сызык үткәрү өчен ике ноктаны белү җитә. Туры пропорциональлек графигының бер ноктасы һәрвакытта да $O(0, 0)$ була. Шуңа күрә, озын таблица төзеп тә тормыйча, тагын бер ноктаны билгеләү җитә.

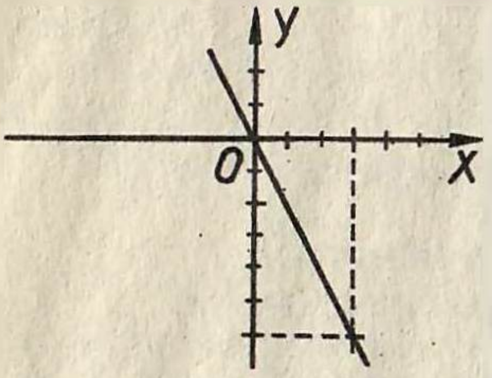
Мисал. $y = -2x$ функциясенең графигын төзергә.

Чишү. Өч баганадан торган таблица төзибез. x ның берәр кыйммәтен, мәсәлән, 3 не алабыз

x	0	3
y	0	

x	0	3
y	0	−6

$x = 3$ булганда $y = -2x = -2 \cdot 3 = -6$.



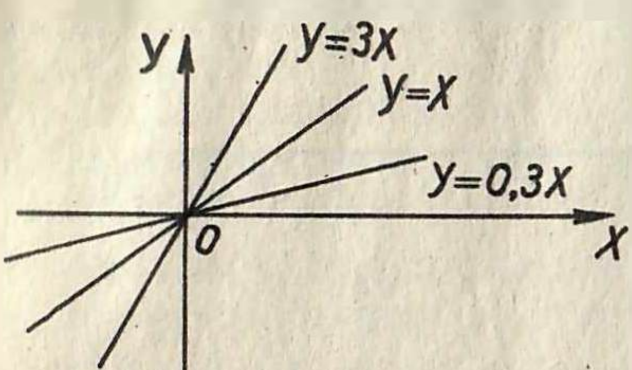
Рәс. 14

Күчәрләрне сызабыз һәм ике ноктасы буенча график төзибез (рәс. 14). k төрле саннар булуга карап, графиклар да төрлечә урнашыр.

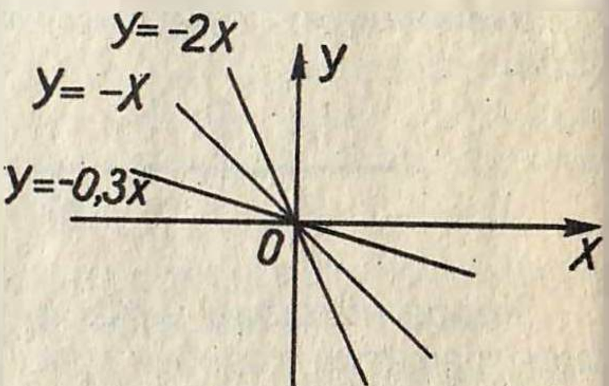
k — уңай саннар булганда, графиклар 15 нче рәсемдәгечә була.

k зуррак сан булган саен, графикның x лар күчәренә карата текәрәк була баруын күрәбез.

k — тискәре саннар булганда, графиклар 16 нчы рәсемдәгечә урнашыр.



Рәс. 15



Рәс. 16

Мисал. $y = 3x$ функциясенең графигы $A(206, 618)$ һәм $B(-100, -200)$ нокталары аша үтәрме?

Чишү. Формулада x урынына 206 ны куйыйк:
$x = 206$ булса, $y = 3x = 3 \cdot 206 = 618$. A ноктасының ординатасы да 618 га тигез. A ноктасы графикта ята.

Формулада x урынына -100 не куйыйк:
$x = -100$ булса, $y = 3x = 3 \cdot (-100) = -300$, ә B ноктасының ординатасы -200 гә тигез. Димәк, B ноктасы графикта ятмый.

Мисал. $x = 7$, 0, -2 булганда, $y = -0{,}2x$ функциясенең кыйммәтләрен табыгыз.

Чишү. $x = 7$ булганда, $y = -0{,}2x = -0{,}2 \cdot 7 = -1{,}4$;
$x = 0$ булганда, $y = -0{,}2x = -0{,}2 \cdot 0 = 0$;
$x = -2$ булганда, $y = -0{,}2x = -0{,}2 \cdot (-2) = 0{,}4$.

Мисал. Функция $y = -3x$ формуласы белән бирелгән.
$y = -9$, 0, 2 булганда, аргументның кыйммәтләрен табыгыз.

Чишү. Бу кире мәсьәлә. y урынына кыйммәтләрен куйсак, тигезләмәләр табарбыз. Тигезләмәләрне чишәбез.

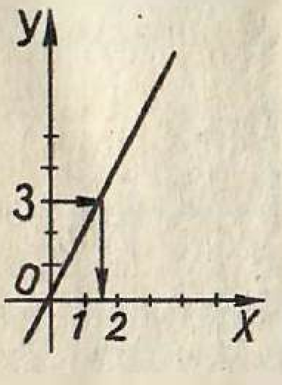
$-9 = -3x$, $x = -9 : (-3)$, $x = 3$.

$0 = -3x$; $x = 0 : (-3)$, $x = 0$.

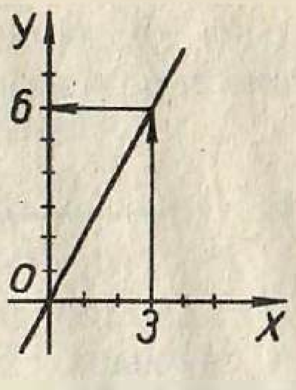
$-3 = 2x$, $x = -3 : 2$, $x = -\frac{3}{2}$.

Мисал. Туры пропорциональлек графигы бирелгән. Графиктан, $x = 2$ булганда, функциянең кыйммәтен һәм $y = 3$ булганда, аргументның кыйммәтен табыгыз.

Чишү.



Рәс. 17. x лар күчәрендә 2 ноктасын билгелибез. Аңардан графикка вертикаль сызык, ә аннан y лар күчәренә кадәр сызык сызабыз. 6 ноктасын таптык.



Рәс. 18. y лар күчәрендә 3 ноктасын билгелибез. Аңардан графикка кадәр горизонталь сызык һәм аннан x лар күчәренә кадәр сызык сызабыз. 1,5 ноктасын таптык.

Бу график ярдәмендә тагын бер мәсьәләне чишәргә, k ны табарга мөмкин.

Беренче графиктан $x = 3$ булганда $y = 6$ икәнен күрдек. Бу саннарны $y = kx$ формуласына куеп, $6 = k \cdot 3$ тигезләмәсен табабыз. Моннан,

$$k = 6 : 3,\ k = 2.$$

Мисал. 100 сумны эшчеләргә $2 : 3 : 5$ чагыштырмасында бүлеп бирергә.

Чишү. Бер өлешне x сум дип билгелик. Ул вакытта беренче эшче $2x$ сум, икенчесе $3x$ сум, ә өченчесе $5x$ сум алыр. Барысы бергә 100 сум.

Тигезләмә:

$$2x + 3x + 5x = 100,$$
$$10x = 100,$$
$$x = 10 \text{ (сум) — бер өлешкә туры килә.}$$

Җ а в а п: 20 сум, 30 сум, 50 сум.

М и с а л. Ящик, мичкә, тартманың массалары 5, 17 һәм 2 саннарына пропорциональ. Ящикның массасы тартманыкыннан 12,6 кг га артыграк булса, бу өч әйбернең массалары бергә күпме булыр?

Ч и ш ү. Бер өлешне x кг дип билгелибез. Ул вакытта ящикның массасы $5x$ кг, мичкәнең массасы $17x$ кг һәм тартманың массасы $2x$ кг булыр. Ящик массасының тартма массасыннан 12,6 кг га зуррак икәне билгеле.

Тигезләмә:

$$5x - 2x = 12{,}6$$
$$3x = 12{,}6$$
$$x = 12{,}6:3$$
$$x = 4{,}2.$$

$4{,}2 \cdot 5 = 21 \quad 4{,}2 \cdot 17 = 71{,}4 \quad 4{,}2 \cdot 2 = 8{,}4$

$21 + 71{,}4 + 8{,}4 = 100{,}8.$

Җ а в а п: 100,8 кг.

М и с а л. Функция $y = kx$ формуласы белән бирелгән. k ны табыгыз һәм таблицаны тутырыгыз.

x	−8	−7		100
y	16		5	

Ч и ш ү. Таблицада тулысынча тутырылган бер багана бар. Формулага x урынына −8 не һәм y урынына 16 ны куйыйк. Тигезләмә килеп чыкты: $16 = -8k, \quad k = 16 : (-8), \quad k = -2.$

Димәк, формула $y = -2x$ рәвешендә булыр. Хәзер таблицаның икенче юлын тутырабыз:

$$x = -7 \text{ булганда, } y = -2x = -2 \cdot (-7) = 14,$$
$$x = 100 \text{ булганда, } y = -2x = -2 \cdot 100 = -200.$$

Беренче юлны тутырабыз:

$$5 = -2x,$$
$$x = 5 : (-2),$$
$$x = -2{,}5.$$

x	−8	−7	−2,5	100
y	16	14	5	−200

7 нче зачет

1. Нинди функция туры пропорциональлек дип атала?
2. Туры пропорциональлекнең үзлекләре.
3. Туры пропорциональлекнең графигы нәрсә булыр?
4. k уңай сан булганда, туры пропорциональлекнең графигы ничек урнаша?
5. k тискәре сан булганда, туры пропорциональлекнең графигы ничек урнаша?

"4" ле һәм "5" ле өчен өстәмә рәвештә, туры пропорциональлек графигының координаталар башлангычы аша үтүен исбатлагыз.

7 нче контроль эш

1. Функция $y = kx$ формуласы белән бирелгән. k ны табыгыз һәм таблицаны тутырыгыз.

x	24		7		5
y		24	21	1,5	

2. Өч йортта яшәүчеләрнең саны 5, 11 һәм 19 саннарына пропорциональ. Әгәр өченче йортта икенчесенә караганда 40 кеше артыграк яшәсә, һәр йортта ничә кеше яши?

§ 8. КИРЕ ПРОПОРЦИОНАЛЬЛЕК

Мисал. Эшченең 80 сум акчасы бар. Әгәр ул көнгә 10 ар сум, 20 шәр сум, a сум тотса, аның акчасы ничә көнгә җитәр?

Чишү. Көннәр санын y дип билгелик.

$$y = 80 : 10 = 8 \text{ (көн)}.$$
$$y = 80 : 20 = 4 \text{ (көн)}.$$
$$y = 80 : a = \frac{80}{a} \text{(көн)}.$$

Көннәр санын табу өчен 80 сумны бер көндә тотылган акчага бүләргә кирәк. Акчаны бер көндә күбрәк тоткан саен, ул азрак сандагы көнгә җитәсен искәртик.

Мисал. Әтнәдән Казанга 75 км. Автомобиль 50 км/сәг, 75 км/сәг, v км/сәг тизлек белән барса, бу араны ничә сәгатьтә үтәр?

Чишү. Вакытны t дип билгелик.

$$t = 75 : 50 = 1,5 \text{ (сәг)}.$$
$$t = 75 : 75 = 1 \text{ (сәг)}.$$
$$t = 75 : v = \frac{75}{v} \text{(сәг)}.$$

Вакытны табу өчен үткән юлны тизлеккә бүләргә кирәк. Тизлек зуррак булган саен вакытның азрак кирәк булуын искәртик.

Мисал. Турыпочмаклы кәгазь битенең мәйданы 1200 см². Әгәр аның ине 20 см, 200 см, b см булса, буе күпме булырга тиеш?

Чишү. Буен k дип билгелик.

$$k = 1200 : 20 = 60 \text{ (см)}.$$

$$k = 1200 : 200 = 6 \text{ (см)}.$$

$$k = 1200 : b = \frac{1200}{b} \text{ (см)}.$$

Турыпочмаклыкның буен табу өчен мәйданын иңенә бүләргә кирәк. Иңе зуррак булган саен буе кечерәк була барганын искәртик.

Билгеләмә. $y = \frac{k}{x}$ рәвешендәге функция (биредә k — нульгә тигез булмаган даими сан) **кире пропорциональлек** дип атала.

Кире пропорциональлеккә мисаллар:

$$y = \frac{10}{x}, \quad y = \frac{1}{x}, \quad y = \frac{100}{a}, \quad c = \frac{1234}{p}.$$

Мисал. $y = \frac{x}{10}$ функциясе кире пропорциональлек була алмый, чөнки формула башка рәвешне алган.

Кире пропорциональлекнең үзлеге

1. Әгәр бәйсез үзгәрешлене берничә тапкыр зурайтсак, функция шул тапкыр кечерәя.
2. Әгәр бәйсез үзгәрешлене берничә тапкыр киметсәк, функция шул тапкыр зурая.

Мисал. Автомобильнең тизлеген 2 тапкыр арттыралар. Билгеле бер юлга киткән вакыт ничек үзгәрер?

Чишү. Вакыт тизлеккә кире пропорциональ.

Җавап: Вакыт 2 тапкыр кимер.

Мисал. Товарның бәясе 3 тапкыр арзаная. Билгеле бер суммага алынган товарның күләме ничек үзгәрер?

Чишү. Товарның күләме аның бәясенә кире пропорциональ.

Җавап: 3 тапкыр күбрәк алырга була.

Мисал. $x = -5$ һәм $x = 0{,}2$ булганда, $y = \frac{10}{x}$ функциясенең кыйммәтләрен табарга.

Чишү. $x = -5$ булганда, $y = \frac{10}{x} = \frac{10}{-5} = -2$.

$x = 0{,}2$ булганда, $y = \frac{10}{0{,}2} = 10 : 0{,}2 = 100 : 2 = 50$.

Мисал. Функция $y = -\frac{12}{x}$ формуласы белән бирелгән.

$y = -6$ һәм $y = \frac{1}{3}$ булганда, аргументның кыйммәтләрен табарга.

Чишү. Формулага y урынына саннар куеп, тигезләмәләр табабыз.

$$-6 = -\frac{12}{x}, \qquad \frac{1}{3} = -\frac{12}{x},$$

$$x = -12 : (-6), \qquad x = -12 : \frac{1}{3},$$

$$x = 2. \qquad x = -36.$$

Кире пропорциональлекнең графигы

Мисал. $y = \frac{8}{x}$ функциясенең графигын төзергә.

Чишү. $y = \frac{8}{x}$ $(x \neq 0)$ функциясенең билгеләнү өлкәсен табыйк.

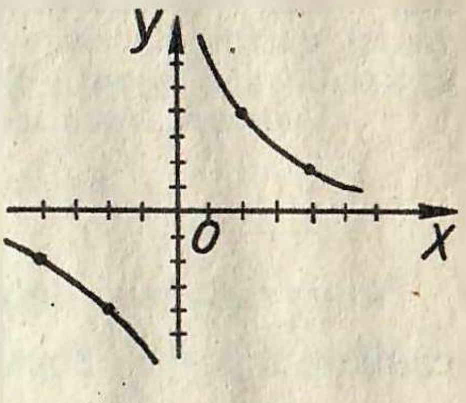
Билгеләнү өлкәсе – x — нульдән башка теләсә нинди сан.

Координаталар яссылыгында $x = 0$ ноктасыннан вертикаль сызык үткәрәбез. Бу y лар күчәре. x нульгә тигез була алмаганлыктан, график бу сызыкны кисеп үтми.

Таблица төзибез. x ка нинди кыйммәт бирсәк тә була, ләкин бөтен саннар белән эшләү уңайрак булыр.

x	−4	−2	−1	1	2	4
y						

Таблицаны тутырабыз. $x = -4$ булганда, $y = \frac{8}{x} = \frac{8}{-4} = -2$ һ.б.ш.



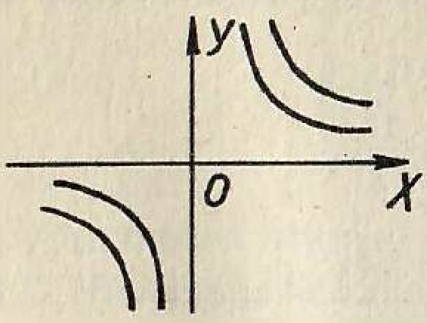
Рәс. 19

Бу нокталарны табып тоташтырабыз. Кәкре сызык килеп чыга. Аны инде туры пропорциональлекнең графигын төзегән кебек ике ноктасы буенча гына төзеп булмый. $y = \frac{8}{x}$ графигын төзү өчен 6—8 нокта алырга кирәк:

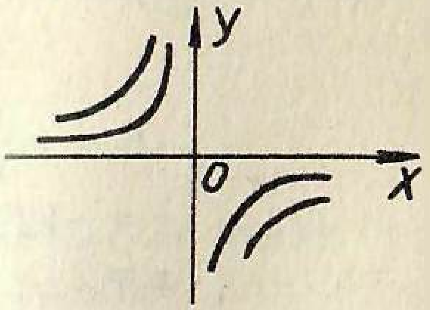
x	−4	−2	−1	1	2	4
y	−2	−4	−8	8	4	2

Билгеләмә. Кире пропорциональлекнең графигы **гипербола** дип атала.

k төрле булганда, гиперболалар төрлечә урнаша. k уңай сан булганда, гиперболалар 20 нче рәсемдәгечә урнашыр. k тискәре сан булганда, гиперболалар 21 нче рәсемдәге кебек урнашыр.

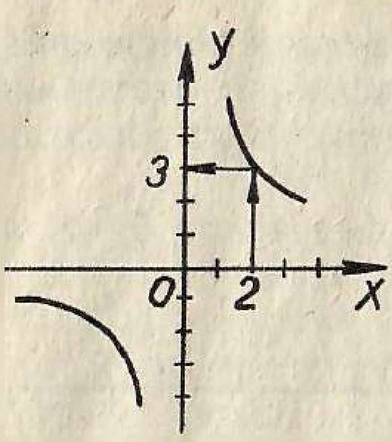


Рәс. 20



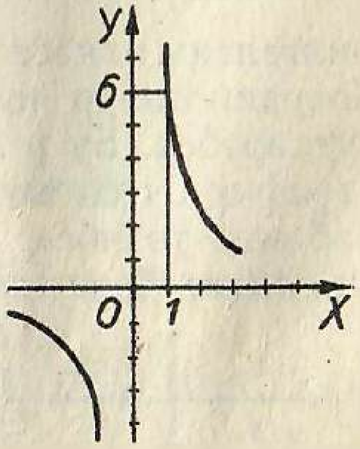
Рәс. 21

Мисал. Бирелгән графигы буенча, $x = 2$ булганда, функциянең кыйммәтен, $y = 6$ булганда, аргументның кыйммәтен табарга. k ны исәпләргә.



Рәс. 22. x лар күчәрендә 2 ноктасын табып, графикка кадәр вертикаль сызык һәм аннан y лар күчәренә таба сызык үткәрәбез. 3 ноктасын таптык.

Җавап: $x = 3$.



Рәс. 23. y лар күчәрендә 6 ноктасын табып, графикка кадәр горизонталь сызык, ә аннан x лар күчәренә таба сызык үткәрәбез. 1 не таптык.

Җавап: $x = 1$.

k ны табабыз. Беренче графиктан $x = 2$, $y = 3$ икәнен белдек. Бу саннарны $y = \frac{k}{x}$ формуласына куеп, табабыз:

$3 = \frac{k}{2}$, моннан $k = 2 \cdot 3 = 6$. Җавап: $k = 6$.

Мисал. $y = \frac{20}{x}$ функциясенең графигы $M(-0{,}25, -80)$ һәм $P(5, 10)$ нокталары аша үтәме?

Чишү. Формулага x урынына $-0{,}25$ не куябыз:

$y = \frac{20}{x} = 20 : (-0{,}25) = -2000 : 25 = -80$, M ноктасының ординатасы да -80 гә тигез. M ноктасы графикта ята.

Формулага x урынына 5 не куябыз:

$y = \frac{20}{x} = 20 : 5 = 4$, ә P ноктасының ординатасы 10 га тигез. P ноктасы графикта ятмый.

Мисал. $y = \frac{k}{x}$ функциясе өчен таблица бирелгән. k ны табарга һәм таблицаны тутырырга.

x	8		16	−4	
y		8	4		2

Чишү. Ике саны да булган баганаы эзлибез.
Бу $x = 16$ һәм $y = 4$. Әлеге саннарны формулага куеп, k ны табабыз:

$$y = \frac{k}{x},\quad 4 = \frac{k}{16},\quad k = 16 \cdot 4,\quad k = 64.$$

Формула $y = \frac{64}{x}$ рәвешендә бирелгән. Беренче юлны тутырабыз:

$x = 8$ булганда, $y = \frac{64}{x} = \frac{64}{8} = 8.$

$x = -4$ булганда, $y = \frac{64}{x} = \frac{64}{-4} = -16.$

Икенче юлны тутырабыз:

$$8 = \frac{64}{x},\quad x = 64 : 8 = 8.$$

$$2 = \frac{64}{x},\quad x = 64 : 2 = 32.$$

Җавап: $k = 64$.

x	8	−8	−16	−4	32
y	8	−8	−4	−16	2

Үзара кире саннар

2 һәм $\frac{1}{2}$ саннары үзара кире саннар дип атала. $\frac{1}{7}$ һәм 7, $\frac{3}{4}$ һәм $\frac{4}{3}$ — шулай ук үзара кире саннар.

Бирелгән санга кире санны табу өчен, аның санаучысы белән ваклаучысының урыннарын алыштырырга кирәк.

Мисал. 20 санын $\frac{1}{2}$ һәм $\frac{1}{8}$ саннарына кире пропорциональ өлешләргә бүләргә.

Чишү. Бирелгән саннарга кире саннарны табабыз: бу 2 һәм 8 саннары.

Бер өлешне x дип билгелик, бу вакытта беренче сан $2x$, икенчесе $8x$ булыр.

Тигезләмә

$$2x + 8x = 20,$$
$$10x = 20,$$
$$x = 20 : 10,$$
$$x = 2.$$
$$2 \cdot 2 = 4, \quad 2 \cdot 8 = 16.$$

Җавап: 4 һәм 16.

Туры һәм кире пропорциональлекләр башка фәннәрдә дә кулланыла. Һәрбер картада бу картадагы 1 см га җир өстендә нинди ераклык туры килгәнен күрсәтүче масштаб бар.

Мисал. Картаның масштабы 1 : 500 000. Бу — картадагы 1 см га җир өстендә 500 000 см туры килә дигән сүз.

$$500\,000 \text{ см} = 5000 \text{ м} = 5 \text{ км}.$$

Биредә туры пропорциональлек икәнлеге ачык. Картадагы ераклык зуррак булган саен, җир өстендә дә ераклык зурая бара.

Мисал. Картаның масштабы 1 : 1 000 000. Картада ике шәһәр арасы 12,4 см. Чынбарлыкта бу ара күпме булыр?

Чишү. Пропорция төзибез: 1 см – 1 000 000 см
12,4 см – x см

$$x = \frac{12{,}4 \cdot 1\,000\,000}{1}, \quad x = 12\,400\,000 \text{ см} = 124 \text{ км}.$$

Җавап: 124 км.

Мисал. Җир өстендә шәһәрләр арасындагы ераклык 820 км га тигез. 1 : 2 000 000 масштаблы картада бу ара күпме булыр?

Чишү. Пропорция төзибез. 1 см – 2 000 000 см
x см – 82 000 000 см

$$x = \frac{82\,000\,000 \cdot 1}{2\,000\,000} = 41 \text{ см}.$$

Җавап: 41 см.

Мисал. Физикадан $S = vt$ формуласын юл формуласы дип атыйлар, биредә S — үтелгән юл, v — тизлек, t — вакыт.

Бу формуланы $y = kx$ формуласы белән чагыштырып карап, үтелгән юлның вакытка туры пропорциональ икәнлеген күрәбез.

Физикадан икенче бер формуланы — вакытны табу формуласын карыйк: $t = \frac{s}{v}$.

Бу формуланы $y = \frac{k}{x}$ формуласы белән чагыштырып, вакытның тизлеккә кире пропорциональ икәнлеген күрәбез.

Физикада формулалар кулланып, мәсьәләләрне ничек чишәләр?

Моның өчен түбәндәгеләрне эшләргә кирәк:
1. Кирәкле формуланы язарга.
2. Аңа бирелгәннәрне язып куярга.
3. Тигезләмә чишкән кебек чишәргә.
4. Җавапны язарга.

Мисал. 2,5 сәгатьтә 2400 км очкан самолетның тизлеген табарга.

Бирелгән:
$S = 2400$ км
$t = 2,5$ сәг
Табарга: v

Чишү.
Юл формуласын язабыз: $s = vt$. Аңа бирелгәннәрне куеп, тигезләмә табабыз: $2400 = 2,5 \cdot v$;
$v = 2400 : 2,5$,
$v = 960$ **Җавап:** 960 км/сәг.

Мисал. 120 см³ тимернең массасын табарга. Тимернең тыгызлыгы 7,8 г/см³.

Бирелгән:
$\rho = 7,8$ г/см³
$V = 120$ см³
Табарга: m

Чишү.
Формуланы язабыз: $m = \rho V$. Аңа бирелгәннәрне куеп, тигезләмә төзибез: $m = 7,8 \cdot 1200$; $m = 936$.

Җавап: 936 г.

Мисал. 600 Н авырлыктагы кешенең массасын табарга.

Бирелгән:
$F = 600$ Н
$g = 9,8$ Н кг $\approx$
≈ 10 Н/кг
Табарга: m

Чишү.
$F = mg$;
$60 = 10 \cdot m$,
$m = 600 : 10$,
$m = 60$. **Җавап:** 60 кг.

Мисал. 500 Н көч 20 Па басым ясарлык таянычның мәйданы нинди булырга тиеш?

Бирелгән:
$F = 500$ Н
$P = 20$ Па
Табарга: S

Чишү.
$F = PS$
$500 = 20 \cdot S$,
$S = 500 : 20$,
$S = 25$.

Җавап: 25 см².

Башка мәсьәләләр дә шундый ук юл белән чишелә.

Мисал. Тизлеге 80 км/сәг булган автомобиль 4,5 сәгатьтә күпме юл үтәр?

Бирелгән:
$v = 80$ км/сәг
$t = 4,5$ сәг
Табарга: S

Чишү.
Юл формуласын язабыз: $S = vt$. Бирелгәннәрне куеп, тигезләмә төзибез: $S = 80 \cdot 4,5$; $S = 360$.
Җавап: 360 км.

Мисал. 1335 г бакырның күләмен табарга. Бакырның тыгызлыгы 8,9 г/см³.

Бирелгән:
$m = 1335$ г
$\rho = 8,9$ г/см³
Табарга: V

Чишү.
$m = \rho V$ формуласына бирелгәннәрне куябыз: $1335 = 8,9 \cdot V$; тигезләмә төзибез:
$V = 1335 : 8,9$; $V = 150$. **Җавап:** 150 см³.

Физика формулалары

	S — юл	(м)
$S = vt$	v — тизлек	(м/сек)
	t — вакыт	(с)
	m — масса	(г)
$m = \rho V$	ρ — тыгызлык	(г/см^3)
	V — күләм	(см^3)
	F — көч	(Н)
$F = mg$	g — коэффициент	(Н/кг)
	m — масса	(кг)
	F — көч	(Н)
$F = PS$	P — басым	(Па)
	S — мәйдан	(м^2)
	A — эш	(Дж)
$A = Fl$	F — көч	(Н)
	l — юл	(м)
	A — эш	(Дж)
$A = Nt$	N — егәрлек	(Вт)
	t — вакыт	(с)

8 нче зачет

1. Нинди функция кире пропорциональлек дип атала?
2. Кире пропорциональлекнең үзлеге.
3. Кире пропорциональлекнең графигы нәрсә дип атала?
4. k — уңай булганда, кире пропорциональлекнең графигы ничек урнаша?
5. k — тискәре булганда, кире пропорциональлекнең графигы ничек урнаша?

8 нче контроль эш

1. Функция $y = \frac{k}{x}$ формуласы белән бирелгән.

k ны табыгыз һәм таблицаны тутырыгыз:

x	4		−7,5		100
y	25	40		0,8	

2. 100 санын $\frac{1}{3}$ һәм $\frac{1}{2}$ саннарына кире пропорциональ өлешләргә бүләргә.

3. $y=\frac{12}{x}$ функциясенең графигын төзегез. $M(-6, -2)$ һәм $P(3, 6)$ нокталары бу графикта ятамы?

§ 9. СЫЗЫКЧА ФУНКЦИЯ

Мисал. A авылыннан B авылына кадәр 10 км. A дан B га капма-каршы якка таба 40 км/сәг тизлек белән автобус чыга. 2 сәгатьтән, 4 сәгатьтән, a сәгатьтән соң ул B авылыннан нинди ераклыкта булыр?

Чишү. Бу ераклыкны x км дип билгелик. 2 сәгатьтә автобус $2 \cdot 40 = 80$ (км) юл үтә. Безгә B дан ераклыкны белергә кирәк, димәк, тагын 10 км өстәргә кирәк.

$$x = 40 \cdot 2 + 10 = 80 + 10 = 90 \text{ (км)},$$
$$x = 40 \cdot 4 + 10 = 160 + 10 = 170 \text{ (км)},$$
$$x = 40 \cdot a + 10 \text{ (км)}.$$

Ераклыкны табу өчен 40 ны вакытка тапкырлап, 10 ны кушарга кирәк.

Мисал. Эшченең 500 сум акчасы бар иде. Ул аны саклык кассасына сала һәм һәр айны 200 әр сум өстәп салып бара. Аның 2 айдан, 10 айдан, a айдан соң күпме акчасы булыр?

Чишү. Акчаны A сум дип билгелик.

$$A = 200 \cdot 2 + 500 = 400 + 500 = 900 \text{ (сум)},$$
$$A = 200 \cdot 10 + 500 = 2000 + 500 = 2500 \text{ (сум)},$$
$$A = 200a + 500.$$

Акчаны исәпләү өчен 200 не айлар санына тапкырлап, 500 не кушарга кирәк.

Бу мисалларда даими санны үзгәрешлегә тапкырлап, тапкырчыгышка икенче даими санны кушарга кирәк.

Билгеләмә. $y = ax + b$ рәвешендәге функция **сызыкча функция** дип атала, биредә a һәм b — даими саннар.

Сызыкча функциягә мисаллар: $y = 2x + 3$, $y = x - 12$, $y = \frac{1}{3}x + 12{,}5$, $y = 0{,}001x - 1$.

$y = \frac{10}{x} + 1$ сызыкча функция була алмый, чөнки формуланың рәвеше үзгәрәк.

Мисал. $x = 2, -3, 7, 0$ булганда, $y = 3x + 1$ сызыкча функциясенең кыйммәтләрен табарга.

Ч и ш ү. $x = 2$ булганда, $y = 3x + 1 = 3 \cdot 2 + 1 = 6 + 1 = 7$,
$x = -3$ булганда, $y = 3x + 1 = 3 \cdot (-3) + 1 = -9 + 1 = -8$,
$x = 7$ булганда, $y = 3x + 1 = 3 \cdot 7 + 1 = 21 + 1 = 22$,
$x = 0$ булганда, $y = 3x + 1 = 3 \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1$.

М и с а л. $y = -3, 20, 0$ булганда, $y = -2x + 5$ функциясе аргументының кыйммәтләрен табарга.

Ч и ш ү. Формулага y урынына бирелгән саннарны куеп, тигезләмәләр табабыз:

$-3 = -2x + 5$, $2x = 3 + 5$, $2x = 8$, $x = 8 : 2$, $x = 4$.

$20 = -2x + 5$, $-2x = 5 - 20$, $2x = -15$, $x = -15 : 2$, $x = -7{,}5$.

$0 = -2x + 5$, $2x = 5$, $x = 5 : 2$, $x = 2{,}5$.

Сызыкча функциянең графигы

М и с а л. $y = 2x - 3$ функциясенең графигын төзергә.

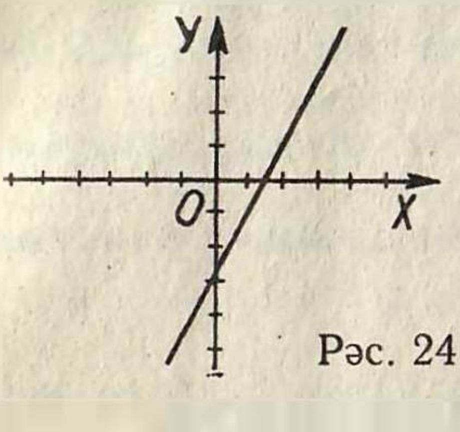
Ч и ш ү. Таблица төзик, x ның теләсә нинди кыйммәтләрен алабыз:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y							

Таблицаны тутырабыз. $x = -3$ булганда $y = 2x - 3 = 2 \cdot (-3) = -6 - 3 = -9$ һ. б.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−9	−7	−5	−3	−1	1	3

Нокталар буенча график төзибез. Графикның туры сызык икәнен күрербез. Димәк, туры пропорциональлекнең графигындагы кебек, ике ноктаны табу җитә (рәс. 24).



Рәс. 24

М и с а л. $y = -2x + 1$ функциясенең графигын төзергә.

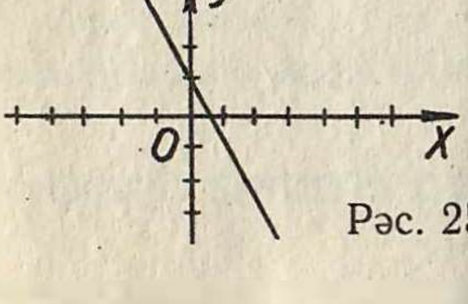
Ч и ш ү. Таблица төзибез. Бу сызыкча функция булганлыктан, ике нокта алу җитә.

x	−2	2
y		

x	−2	2
y	5	−3

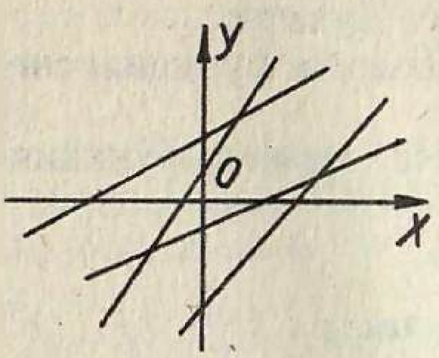
Таблицаны тутырабыз. $x = -2$ булганда, $y = -2x + 1 = -2(-2) + 1 = 4 + 1 = 5$, $x = 2$ булганда, $y = -2x + 1 = -2 \cdot 2 + 1 = -4 + 1 = -3$.

Ике ноктаны табып, туры сызык үткәрәбез (рәс. 25).

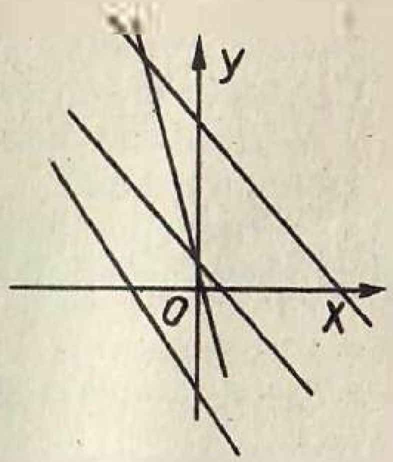


Рәс. 25

a һәм b ның төрле кыйммәтләре өчен сызыкча функциянең графигы төрлечә урнаша.



Рәс. 26. a унай булганда графикларның урнашуы



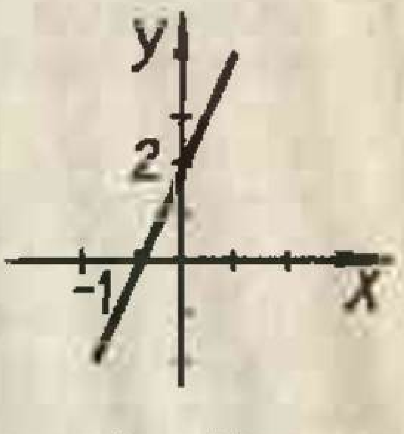
Рәс. 27. a тискәре булганда графикларның урнашуы

Мисал. $y = 3x - 10$ функциясенең графигы $A(100, 290)$ һәм $B(-520, -1520)$ нокталары аша узамы?

Чишү. Формулага x урынына аргументның кыйммәтен куйыйк: $y = 3x - 10 = 3 \cdot 100 - 10 = 300 - 10 = 290$, A ноктасының ординатасы да 290 га тигез. Димәк, A ноктасы графикта ята.

$y = 3x - 10 = 3 \cdot (-520) - 10 = -1560 - 10 = -1570$, ә B ноктасының ординатасы -1520 гә тигез. В ноктасы графикта ятмый.

Мисал. Бирелгән сызыкча функциянең графигы буенча a һәм b ның кыйммәтләрен табарга (рәс. 28).



Рәс. 28

Чишү. $x = 0$ булганда, $y = ax + b = a \cdot 0 + b = b$ икәнен искәртеп үтик. Бу исә график y лар күчәре белән b ноктасында кисешә дигән сүз. Безнең графикта $b = 2$ һәм формула $y = ax + 2$ рәвешен ала. a ны табыйк. Графикта теләсә нинди нокта алабыз, шулай да күбрәк бөтен саннар белән эшләргә тырышырбыз. Графикта $(-1, 0)$ ноктасы бар. Формулага саннарны куябыз:

$y = ax + 2, 0 = a \cdot (-1) + 2$. Тигезләмәне чишеп, $a = 2$ не табабыз. Җавап: $y = 2x + 2$.

Мисал. Графигын төземичә генә, $y = 10x - 20$ функциясе графигының координаталар күчәрләре белән нинди нокталарда кисешүен табарга.

Чишү. Графикның y лар күчәре белән кисешү ноктасын табыйк. Бу ноктаның ординатасы b га тигез. Димәк, $b = -20$ дигән сүз. Шулай булгач, y лар күчәре белән кисешү ноктасының координаталары — $(0, -20)$.

Графикның x лар күчәре белән кисешү ноктасын табабыз. x лар күчәрендәге барлык нокталарда да $y = 0$. Тигезләмә төзибез:

$$0 = 10x - 20,$$
$$-10x = -20,$$
$$x = -20 : (-10),$$
$$x = 2.$$

Җавап: y лар күчәре белән $(0, -20)$ ноктасында,
x лар күчәре белән $(2, 0)$ ноктасында.

9 нчы зачет

1. Нинди функция сызыкча функция дип атала?

2. Сызыкча функциянең графигы нәрсә булыр?

3. a — уңай сан булганда, $y = ax + b$ сызыкча функциясенең графигы ничек урнаша?

4. a — тискәре сан булганда, $y = ax + b$ сызыкча функциясенең графигы ничек урнаша?

9 нчы контроль эш

1. $x = -6, 0, 2, 4, 10$ булганда, $y = 5x - 4$ функциясенең кыйммәтләрен табарга.

2. $y = 3, -10, 0$ булганда, $y = 7x + 3$ функциясе аргументының кыйммәтләрен табарга.

3. $y = x - 5$ функциясенең графигын төзегез.

$A(-240, 230)$ һәм $B(520, 515)$ нокталары бу график өстендә ятамы?

§ 10. КҮПБУЫННАРНЫҢ СУММАСЫ ҺӘМ АЕРМАСЫ

Бербуын дип без саннар, хәрефләр һәм аларның дәрәҗәләрен тапкырлау тамгасы белән тоташтырган аңлатманы атадык.

$$2ab^5, \quad 6{,}25a^2bcx^4, \quad 7, \quad c.$$

Билгеләмә. Бербуыннарның суммасы **күпбуын** дип атала.

Күпбуыннарга мисаллар: $2a + 3b$, $5 - a - c - c$, $a^2 + 6b^2$.

Күпбуынга керүче бербуыннар күпбуыннарның буыннары дип атала. Әгәр күпбуын ике бербуыннан торса — **икебуын** дип, өч бербуыннан торса, **өчбуын** дип атала.

Мисал. $10 + 20a + 30b - 7 - 5a$ күпбуынын гадиләштерергә.

Чишү. Бу күпбуында охшаш кушылучылар һәм саннар бар. Аларны кушабыз:

$$\underline{10} + \underline{\underline{20a}} + 30b - \underline{7} - \underline{\underline{5a}} = 3 + 15a + 30b.$$

Без $10 - 7 = 3$ һәм $20a - 5a = 15a$ гамәлен эшләдек.

$3 + 15a + 30b$ күпбуынын башкача үзгәртү мөмкин түгел.

Мондый күпбуыннар **стандарт рәвештәге күпбуыннар** дип атала.

Мисал. $5 - 2x + 3x^2 - x^3 + 8 - 4x + 4x^2$ күпбуынын стандарт рәвешкә китерергә.

Чишү. $5 - 2x + 3x^2 - x^3 + 8 - 4x + 4x^2 = 13 - 6x + 7x^2 - x^3$.

Без түбәндәге гамәлләрне үтәдек: $5 + 8 = 13$, $-2x - 4x = -6x$, $3x^2 + 4x^2 = 7x^2$. Башка үзгәртүләр эшләп булмый.

Җавап: $13 - 6x + 7x^2 - x^3$.

Мисал. $(2 + 2a - 3b)$ һәм $(3 - 5a + b)$ күпбуыннарын кушарга.

Чишү. Җәяләрне ачабыз һәм охшаш буыннарны берләштерәбез.
$(2 + 2a - 3b) + (3 - 5a + b) = 2 + 2a - 3b + 3 - 5a + b = 5 - 3a - 2b$.
Түбәндәге гамәлләрне эшләдек: $2 + 3 = 5$, $2a - 5a = -3a$, $-3b + b = -2b$.

Мисал. $(5x + 2y - 3)$ күпбуыныннан $(3x + 6y - 6)$ күпбуынын алырга.

Чишү. Җәяләрне ачабыз. Бу мисалда икенче җәя алдында "минус" тамгасы тора. Шуңа күрә, икенче җәяне ачканда, кушылучыларның барысының да тамгаларын капма-каршысына үзгәртергә кирәк.
$(5x + 2y - 3) - (3x + 6y - 6) = 5x + 2y - 3 - 3x - 6y + 6 = 2x - 4y + 3$.

Түбәндәге гамәлләрне эшләдек: $5x - 3x = 2x$, $2y - 6y = -4y$, $-3 + 6 = 3$.

Җәяләрне ачу кагыйдәсе

Әгәр җәя алдында "плюс" тамгасы торса, җәяләрне ачканда кушылучыларның тамгасы үзгәрми.

Әгәр җәя алдында "минус" тамгасы торса, җәяләрне ачканда кушылучыларның тамгалары капма-каршыга үзгәрә.

Мисал. $3a - 4b + 5c - 7 + x$ күпбуынын икебуын белән өчбуын суммасы рәвешендә язарга.

Чишү. $3a - 4b + 5c - 7 + x = (3a - 4b) + (5c - 7 + x)$.

Мисал. Шушы ук күпбуынны икебуын белән өчбуынның аермасы рәвешендә язарга.

Чишү. $3a - 4b + 5c - 7 + x = (3a - 4b) - (-5c + 7 - x)$.

Җәяләр эченә алу кагыйдәсе

Җәя алдына "плюс" тамгасы куелса, җәяләр эченә алына торган буыннарны үз тамгалары белән язалар.

Җәя алдына "минус" тамгасы куелса, җәяләр эченә алына торган буыннарны капма-каршы тамгалары белән язалар.

Мисал. $0{,}7x^4 + 0{,}2x^2 - 5 - x^4 - (-0{,}3x^4 + 0{,}2x^2 - 8)$ аңлатмасының кыйммәте үзгәрешле зурлыкның кыйммәтенә бәйле түгеллеген исбатлагыз.

Чишү. Бу аңлатманы гадиләштерербез. Җәяләрне ачыйк һәм охшаш буыннарны берләштерик.

$0{,}7x^4 + 0{,}2x^2 - 5 - x^4 - (-0{,}3x^4 + 0{,}2x^2 - 8) = 0{,}7x^4 + 0{,}2x^2 - 5 - x^4 + 0{,}3x^4 -$
$- 0{,}2x^2 + 8 = 0 + 0 + 3 = 3$.

Түбәндәге гамәлләрне эшләдек:

$$0{,}7x^4 - 1x^4 + 0{,}3x^4 = 0, \quad 0{,}2x^2 - 0{,}2x^2 = 0, \quad -5 + 8 = 3.$$

Җавапта 3 санын таптык. Бу, чынлап та, xның теләсә нинди кыйммәте өчен дә җавап һәрвакыт 3 кә тигез, ягъни аңлатманың кыйммәте үзгәрешле x зурлыгының кыйммәтенә бәйле түгел дигән сүз.

Мисал. $(2x - 15) + (3x - 16) - (6x - 17) = 18$ тигезләмәсен чишәргә.

Ч и ш ү. Җәяләрне ачабыз.

$$2x - 15 + 3x - 16 - 6x + 17 = 18,$$
$$2x + 3x - 6x = 18 + 15 + 16 - 17,$$
$$-1x = 32,$$
$$x = 32 : (-1),$$
$$x = -32.$$

М и с а л. Рәттән килүче өч бөтен санның суммасы 156 га тигез. Бу саннарны табарга.

Ч и ш ү. Иң кечкенә санны x дип билгелик. Аннан соң килүче сан $x + 1$, өченчесе $x + 2$ булыр.

Тигезләмә:
$$x + (x + 1) + (x + 2) = 156,$$
$$x + x + 1 + x + 2 = 156,$$
$$x + x + x = 156 - 1 - 2,$$
$$3x = 153$$
$$x = 153 : 3$$
$$x = 51,\ 51 + 1 = 52,\ 51 + 2 = 53.$$

Җавап: 51, 52, 53.

10 нчы зачет

1. Нәрсә ул күпбуын?
2. Җәяләрне ачу кагыйдәсе.
3. Җәяләр эченә алу кагыйдәсе.

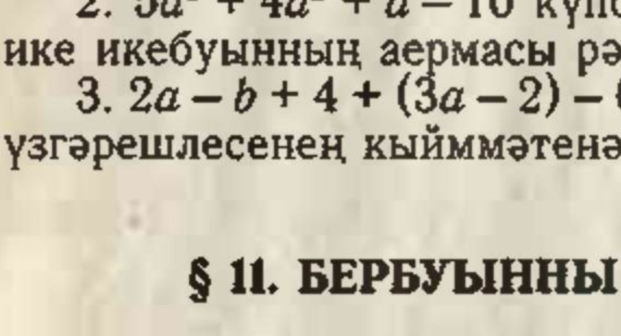
10 нчы контроль эш

1. $(3x^2 - 5x + 2) - (6x^2 + 3x - 2)$ анлатмасын стандарт рәвештәге күпбуынга әйләндерегез.

2. $5a^3 + 4a^2 + a - 10$ күпбуынын ике икебуынның суммасы һәм ике икебуынның аермасы рәвешендә күрсәтегез.

3. $2a - b + 4 + (3a - 2) - (5a + b - 5)$ аңлатмасының кыйммәте a үзгәрешлесенең кыйммәтенә бәйле түгеллеген исбатлагыз.

§ 11. БЕРБУЫННЫ КҮПБУЫНГА ТАПКЫРЛАУ



Рәс. 29

Ике участоктан торган турыпочмаклыкның мәйданын табарга кирәк булсын ди.

1 н ч е ю л. Турыпочмаклыкның иңен табабыз: $12 + 5 = 17$ (см).

Мәйданын исәплибез:

$17 \cdot 10 = 170$ (см²).

2 н ч е ю л. Беренче участокның мәйданын исәплибез:

$$10 \cdot 12 = 120 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Икенче участокның мәйданын исәплибез:

$$10 \cdot 5 = 50 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Кушабыз: $120 + 50 = 170$ (см^2).

Нәтиҗәдә бер үк сан килеп чыгуын күрдек. Димәк:

$$10 \cdot (12 + 5) = 10 \cdot 12 + 10 \cdot 5.$$

Башлангыч сыйныфларда моны тапкырлауның тарату законы дип атаган идек.

Санны суммага тапкырлау өчен аны һәрбер кушылучыга тапкырларга кирәк.

$2a$ бербуынын $3 + 5b$ суммасына тапкырларга кирәк булсын: $2a(3 + 5b)$.

Тарату законы буенча:

$$2a(3 + 5b) = 2a \cdot 3 + 2a \cdot 5b = 6a + 10ab.$$

Кагыйдә. *Бербуынны күпбуынга тапкырлау өчен, бербуынны күпбуынның һәр кушылучысына тапкырларга кирәк.*

Мисал. $4 \cdot (a + 2b - 6)$.

Чишү. Җәяләр эчендә өч кушылучы бар. 4 не һәрбер кушылучыга тапкырларга кирәк: $4 \cdot (a + 2b - 3) = 4a + 8b - 12$. Җәяләр эчендә ничә кушылучы булса, җавапта да шуның санынча кушылучы булуын искәртик.

Мисал. $-2a^2 \cdot (1 - 3a + 4a^3 - 5bc)$ гамәлен эшләргә.

Чишү. Бербуынны җәяләр эчендәге барлык дүрт кушылучыга да тапкырлап чыгыйк.

$$-2a^2 \cdot (1 - 3a + 4a^3 - 5bc) = -2a^2 + 6a^3 - 8a^5 + 10a^2bc.$$

Мисал. Гадиләштерергә: $2x(1 - x) + 3x(2 - 3x)$.

Чишү. Бу мисалда башта $2x$ ны беренче җәягә, аннан соң $3x$ ны икенче җәягә тапкырларга һәм охшаш буыннарны берләштерергә кирәк.

$$2x(1 - x) + 3x(2 - 3x) = 2x - 2x^2 + 6x - 9x^2 = 8x - 11x^2.$$

Мисал. Гадиләштерергә: $5a \cdot (a - b) - a \cdot (2a - b)$.

Чишү. Бу мисалда башта $5a$ ны беренче җәягә, аннан соң a ны икенче җәягә тапкырларга һәм охшаш буыннарны берләштерергә кирәк. Бу мисал алдагысыннан икенче җәя алдында "минус" тамгасы булу белән аерыла, димәк, икенче җәяне ачканда тамгалар капма-каршысына үзгәрә.

$$5a(a - b) - a(2a - b) = 5a^2 - 5ab - 2a^2 + ab = 3a^2 - 4ab.$$

Мисал. Гадиләштерергә: $2y(1 - 2y) + (3y + 2) - (4y - 3)$.

Чишү. $2y$ ны беренче җәягә тапкырлыйбыз, ә калган икесен кагыйдә буенча ачабыз:

$$2y(1 - 2y) + (3y + 2) - (4y - 3) = 2y - 4y^2 + 3y + 2 - 4y + 3 = -4y^2 + y + 5.$$

Мисал. $15x + 6x \cdot (2 - 3x) = 9x(5 - 2x) - 36$ тигезләмәсен чишәргә.

Ч и ш ү. Җәяләрне ачабыз, аннан бербуыннарны җәяләргә тапкырлыйбыз:

$$15x + 12x - 18x^2 = 45x - 18x^2 - 36,$$
$$15x + 12x - 18x^2 + 18x^2 - 45x = -36,$$
$$-18x = -36,$$
$$x = -36 : (-18),$$
$$x = 2$$

$18x^2 - 18x^2 = 0$ икәнен искәртик.

М и с а л. $x = 10$ булганда, $5x \cdot (2x - 6) - 2{,}5x(4x - 2)$ аңлатмасының кыйммәтен табарга.

Ч и ш ү. Башта аңлатманы гадиләштерәбез:
$5x \cdot (2x - 6) - 2{,}5x \cdot (4x - 2) = 10x^2 - 30x - 10x^2 + 5x = -25x.$

Хәзер бу аңлатмага 10 ны куеп чишәбез:

$x = 10$ булганда $-25x = -25 \cdot 10 = -250.$

М и с а л. Турыпочмаклыкның буе иненнән 2 тапкыр зуррак. Инен 3 м га зурайткач, мәйдан 24 м^2 га арткан. Турыпочмаклыкнын баштагы буен һәм инен табарга.

Ч и ш ү. Мондый мәсьәләләрне таблица ярдәмендә чишү унайрак.

	Буе, м	Иңе, м	Мәйданы, м^2
Элек			
Хәзер			

Таблицаны нәрсәдән тутыра башларга? Мәсьәләдә табылырга тиешле зурлыктан дөресрәк булыр. Безгә баштагы буйны һәм иңне табарга кирәк. Буе зуррак, ә иңе кечерәк. Гадәттә хәреф белән кечерәк зурлыкны билгелиләр. Шулай итеп, иңне x (м), ә буйны, аңардан 2 тапкыр озынрак булганлыктан, $2x$ (м) дип билгелибез. Боларны таблицага языйк.

Буе $2x$ м, ә иңе x м. Мәйданны табарга мөмкин. Мәйданны табу өчен иңен буена тапкырларга кирәк: $2x \cdot x = 2x^2$ (м^2). Беренче юлны тутырып бетердек.

Иңе x (м) иде, аны 3 м га арттыралар һәм ул $(x + 3)$ м була. Мәсьәләнең шарты буенча, аның буен үзгәртмиләр. Мәйданны яңадан исәплибез. Иңе $(x + 3)$ м, буе $2x$ м булып калды, мәйданы $2x \cdot (x + 3)$ м^2 була. Боларны икенче юлга язып куйыйк. Таблицаны тутырып бетердек:

	Буй, м	Иң, м	Мәйдан, м^2
Элек	$2x$	x	$2x^2$
Хәзер	$2x$	$x + 3$	$2x(x + 3)$

Тигезләмә төзибез. Мәсьәләдә 24 м^2 кулланылмыйча калды. Ул мәйданны белдерүче зурлык һәм аны мәйданнарны тигезләү өчен кулланабыз. Мәйданнар аңлатмаларын рәттән язабыз: $2x^2$ $2x \cdot (x + 3)$.

Безнең мисалда мәйдан артты, ягъни икенче аңлатма беренчесеннән зуррак булды. Аларны тигезләү өчен зуррак аңлатманы кечерәйтергә мөмкин:

$$2x^2 = 2x \cdot (x + 3) - 24.$$

24 не кечерәк аңлатмага кушарга да мөмкин иде:

$$2x^2 + 24 = 2x \cdot (x + 3).$$

Зуррак аңлатмадан кечерәген алырга да була:

$$2x \cdot (x + 3) - 2x^2 = 24.$$

Тигезләмәне чишәбез:

$$2x \cdot (x + 3) = 2x^2 + 24,$$
$$2x^2 + 6x = 2x^2 + 24,$$
$$2x^2 + 6x - 2x^2 = 24,$$
$$6x = 24,$$
$$x = 24 : 6,$$
$$x = 4.$$

Таблицага карыйбыз. x дип участокның иңен билгеләдек, димәк, иңе 4 м була. Буен табабыз: $2x = 2 \cdot 4 = 8$.

Җавап: 4 м һәм 8 м.

Күпбуынны тапкырлаучыларга уртак тапкырлаучыны җәя тышына чыгарып таркату

Мисал. Гадиләштерергә: $5 \cdot (a + b)$.

Чишү. $5 \cdot (a + b) = 5a + 5b$.

Кире мәсьәләне дә чишәргә мөмкинме? $5a + 5b$ аңлатмасы бирелгән булсын. Кайсы санны нинди җәягә тапкырлаганны белергә кирәк. Ике кушылучыда да, $5a$ һәм $5b$ да да 5 саны бар, димәк, 5 санына тапкырлаганнар. Безнең ике кушылучыбыз бар, димәк, җәя эчендә дә ике кушылучы булырга тиеш.

$$5a + 5b = 5 \cdot (a + b).$$

Бу гамәл уртак тапкырлаучыны җәя тышына чыгару дип атала. Нәтиҗәдә, суммадан бербуын белән күпбуынның тапкырчыгышы килеп чыга. Күпбуын тапкырлаучыларга таркалды диләр.

Мисал. $ax - bx$ ны тапкырлаучыларга таркатырга.

Чишү. Ике кушылучыга да карап, аларда бер үк x хәрефе барлыгын күрәбез. Аны җәя тышына чыгарабыз. Безнең очракта ике кушылучы бар. Димәк, җәя эчендә дә ике кушылучы булыр.

$$ax - bx = x(a - b).$$

Мисал. $5ab - 10ac$ ны тапкырлаучыларга таркатырга.

Чишү. 5 һәм 10 саннары 5 кә бүленә, димәк, җәя тышына 5 не чыгарырга мөмкин. Шулай ук ике кушылучыда да a бар. Җәя тышына $5a$ аңлатмасын чыгарабыз.

$$5ab - 10ac = 5a(b - 2c).$$

Уртак тапкырлаучыны җәя тышына чыгару кагыйдәсе

Уртак тапкырлаучыны җәя тышына чыгару өчен түбәндәгеләрне эшләргә кирәк:

1) Коэффициентларның иң зур уртак бүлүчесен табарга.

2) Һәр кушылучыда да булган хәрефләрне табарга һәм аларның иң кечкенә дәрәҗәсен алырга.

3. Җәяләр эчендәге кушылучылар һәрбер кушылучыны уртак тапкырлаучыга бүлеп табыла.

4) Җәяләр эчендәге кушылучылар саны башта бирелгән кушылучылар санына тигез.

Мисал. Тапкырлаучыларга таркатырга: $10a^4b^3 - 15a^4b^2c - 20a^3b^4x$.

Чишү. 1. 10, 15, 20 саннарының иң зур уртак бүлүчесен эзлибез. Бу сан 5 саны.

2. Һәр кушылучыда да булган хәрефләрне эзләп табабыз. a һәм b хәрефләре бар. Өченче кушылучыда a ның иң кечкенә дәрәҗәсе 3 кә тигез, b ның иң кечкенә дәрәҗәсе 2 саны (икенче кушылучыда). Уртак тапкырлаучыны төзибез: $5a^3b^2$. Аны җәя тышына чыгарабыз.

3. Әгәр бүлүне телдән эшләү кыен булса, аерым-аерым язып эшләргә мөмкин.

Һәрбер кушылучыны уртак тапкырлаучыга бүлеп чыгабыз:

$$10a^4b^3 : 5a^3b^2 = 2ab, \quad -15a^4b^2c : 5a^3b^2 = -3ac, \quad 20a^3b^4x : 5a^3b^2 = 4b^2x.$$

$$10a^4b^3 - 15a^4b^2c + 20a^3b^4x = 5a^3b^2(2ab - 3ac + 4b^2x).$$

Мисал. Тапкырлаучыларга таркатырга: $4ab - 6bc + 2b$.

Чишү. Уртак тапкырлаучы $2b$ га тигез. Аны җәя тышына чыгарабыз:

$$4ab - 6bc + 2b = 2b(2a - 3c + 1).$$

Шарт буенча өч кушылучы бар иде, җәяләр эчендә дә өч кушылучы калырга тиеш:

$$4ab : 2b = 2a, \quad 6bc : 2b = 3c, \quad 2b : 2b = 1.$$

Тапкырлаучыларга таркату мисаллар, тигезләмәләр чишү өчен һәм башка максатларда кулланыла.

Мисал. Исәпләргә: $4{,}532 \cdot 0{,}54 + 0{,}45 \cdot 4{,}532$.

Чишү. Билгеле, бу очракта башта беренче тапкырлауны, аннан соң икенче тапкырлауны эшләргә һәм бу ике җавапны кушарга мөмкин. Тик мисалга игътибар беләнрәк карасак, анда ике кушылучы булуын һәм аларның икесендә дә бер үк 4,532 саны барлыгын күрербез. Бу санны җәяләр тышына чыгарырга мөмкин:
$4{,}532 \cdot 0{,}54 + 0{,}45 \cdot 4{,}532 = 4{,}532(0{,}54 + 0{,}45) = 4{,}532 \cdot 1 = 4{,}532$. Мисал телдән чишелә.

Мисал. Тигезләмәне чишәргә: $5x^2 - 20x = 0$.

Чишү. Гадиләштерү мөмкин түгел, чөнки охшаш буыннар юк. Ләкин сул якта уртак тапкырлаучы булган $5x$ ны җәя тышына чыгарырга мөмкин:

$$5x^2 - 20x = 0$$
$$5x(x - 4) = 0.$$

Тапкырлаучыларның берсе нульгә тигез булганда тапкырчыгыш нульгә тигез була. Тигезләмә ике тигезләмәгә таркала:

$$5x = 0 \quad \text{яки} \quad x - 4 = 0,$$
$$x = 0 : 5, \qquad x = 4.$$
$$x = 0.$$

Җавап: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

Мисал. $5^{18} - 25^8$ аңлатмасының 120 гә бүленүен исбатларга.

Исбатлау. Башта 25^8 не үзгәртәбез: $25^8 = (25)^8 = (5^2)^8 = 5^{16}$. 5^{16} сен җәя тышына чыгарабыз: $5^{18} - 5^{16} = 5^{16}(5^2 - 1) = 5^{16} \cdot 24$.

Беренче тапкырлаучыдан бер бишлене алабыз.

$$5^{16} \cdot 24 = 5^{15} \cdot 5 \cdot 24 = 5^{15} \cdot 120.$$

Бу санда 120 тапкырлаучысы бар, шулай булгач, бу сан үзе дә һәм башта бирелгән аңлатма да 120 гә бүленә.

Җәя тышына бербуынны гына түгел, башка аңлатмаларны да чыгарырга мөмкин.

Мисал. Тапкырлаучыларга таркатырга: $2a(x - y) + 3b(x - y)$.

Чишү. Бу аңлатмада ике кушылучы: $2a \cdot (x - y)$ һәм $3b \cdot (x - y)$ бар. Ике кушылучыда да уртак тапкырлаучы — $(x - y)$ җәясе бар. Бу җәяне җәя тышына чыгарыйк:

$$2a(x - y) + 3b(x - y) = (x - y)(2a + 3b).$$

Мисал. Тапкырлаучыларга таркатырга: $4(x + 2) + (x + 2)^2$.

Чишү. Җәя тышына уртак $(x + 2)$ тапкырлаучысын чыгарабыз:

$$4(x + 2) + (x + 2)^2 = (x + 2)(4 + x + 2) = (x + 2) \cdot (x + 6).$$

Мисал. Тапкырлаучыларга таркатыгыз: $x(y - 9) + y(9 - y)$.

Чишү. $a - b = -(b - a)$ бердәйлеге нигезендә $9 - y = -(y - 9)$ була. $x(y - 9) + y(9 - y) = x(y - 9) - y(y - 9)$. Уртак тапкырлаучы $(y - 9)$ ны җәя тышына чыгарабыз: $(y - 9)(x - y)$.

11 нче зачет

1. Бербуынны күпбуынга тапкырлау кагыйдәсе.
2. Уртак тапкырлаучыны җәя тышына чыгару кагыйдәсе.

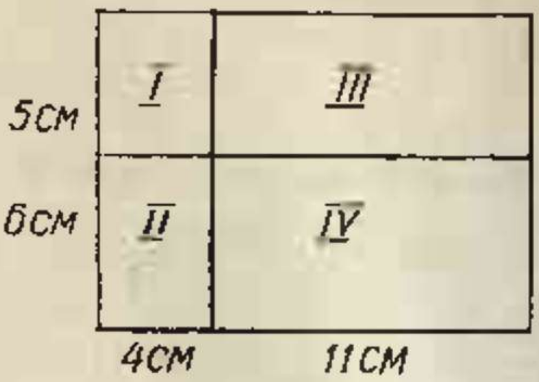
11 нче контроль эш

1. Тигезләмәне чишәргә: $18 \cdot (3x - 5) - 11(2x - 5) = 125$.

2. Уртак тапкырлаучыны җәя тышына чыгарырга: $24p^3x^4 + 36px^4$, $14a^3b^5 - 35a^2b^4 - 21b^3a^2$, $25x^{35} - 35x^{15}$.

3. Турыпочмаклыкның буе аның иненнән 4 тапкыр зуррак. Әгәр буйны 2 см га киметсәк, мәйдан 10 см^2 га кими. Турыпочмаклыкның баштагы үлчәмнәрен табарга.

§ 12. КҮПБУЫННАРНЫ ТАПКЫРЛАУ



Рәс. 30

Дүрт участоктан торган турыпочмаклыкның мәйданын табарга кирәк булсын (рәс. 30)

Моны ике юл белән үтәргә мөмкин.

1 нче юл. Турыпочмаклыкның инен табабыз: $5 + 6 = 11$ (см).

Турыпочмаклыкның буен табабыз: $4 + 11 = 15$ (см).

Мәйданны табабыз: $11 \cdot 15 = 165$ (см^2).

2 нче юл. Беренче участокның мәйданын табабыз: $4 \cdot 5 = 20$ (см^2).

Икенче участокның мәйданын табабыз: $4 \cdot 6 = 24$ (см^2).

Өченче участокның мәйданын табабыз: $11 \cdot 5 = 55$ (см^2).

Дүртенче участокның мәйданын табабыз: $11 \cdot 6 = 66$ (см^2).

Бу мәйданнарны кушабыз: $20 + 24 + 55 + 66 = 165$ (см^2). Нәтиҗәдә бер үк сан килеп чыкты, ягъни

$$(4 + 11) \cdot (5 + 6) = 4 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 11 \cdot 5 + 11 \cdot 6.$$

Беренче җәядә беренче урында 4 саны тора. Бу санның икенче җәя эчендәге ике санга тапкырланганын күрәбез. Икенче урында торган 11 саны да икенче җәя эчендәге 5 һәм 6 саннарына тапкырлана.

Кагыйдә. *Күпбуынны күпбуынга тапкырлау өчен беренче күпбуынның һәр буынын икенче күпбуынның һәр буынына тапкырлап чыгарга кирәк.*

Мисал. Тапкырлауны эшләргә: $(a + b)(2 + c - x)$.

Чишү. Җавапта ничә кушылучы булыр? Беренче җәядә беренче урында a саны тора. Аны 2 гә, c га һәм x ка тапкырларга кирәк. Өч кушылучы булды дигән сүз. Беренче җәядә икенче урында b саны тора. Аны да 2 гә, c га һәм x ка тапкырларга кирәк. Тагын өч кушылучы килеп чыга. Барысы $3 + 3 = 6$ кушылучы булырга тиеш. Хәзер тапкырлауны эшлибез.

Башта a ны, аннан соң b ны икенче җәянең барлык кушылучыларына тапкырлап чыгабыз.

$$(a + b) \cdot (2 + c - x) = 2a + ac - ax + 2b + bc - bx.$$

Гомумән, җаваптагы кушылучылар санын белү өчен беренче җәядәге кушылучылар санын икенче җәядәге кушылучылар санына тапкырларга кирәк.

Мисал. Әгәр беренче күпбуында 3 кушылучы, икенчесендә 5 кушылучы булса, бу ике күпбуынның тапкырчыгышы ничә кушылучыдан тора?

Чишү. $3 \cdot 5 = 15$ кушылучы.

Мисал. Тапкырлауны эшләргә: $(2a - 5)(3a + 2)$.

Чишү. $(2a - 5)(3a + 2) = 2a \cdot 3a + 2a \cdot 2 - 5 \cdot 3a - 5 \cdot 2 = 6a^2 + 4a - 15a - 10$. Тапкырлауны телдән генә эшләп, җавапны язып

кына куярга була. Җавапта 4 кушылучы, шуларның 2 се охшаш буын булып чыкты. $4a$ һәм $-15a$. Аларны кушабыз:

$$6a^2 + 4a - 15a - 10 = 6a^2 - 11a - 10.$$

Мисал. Тапкырлауны эшләргә: $(3b^2 - c)(b^2 - 2c)$.

Чишү. Тапкырлауны телдән эшләп, җавапны гына язабыз:

$$(3b^2 - c)(b^2 - 2c) = 3b^4 - 6b^2c - cb^2 + 2c^2 = 3b^4 - 7b^2c + 2c^2.$$

$-6b^2c$ һәм $-cb^2$ охшаш буыннарын берләштердек.

Мисал. $(a + 2b)^2$ күпбуынын үзгәртергә.

Чишү. Җәя квадратта дип бирелгән, икенче төрле әйткәндә, җәя үз-үзенә тапкырлана. $(a + 2b)^2 = (a + 2b)(a + 2b) = a^2 + 2ab + 2ab + + 4b^2 = a^2 + 4ab + 4b^2$.

Мисал. Тапкырлауны эшләргә: $(3x^2 - 4xy + y^2)(2x + y)$.

Чишү. Тапкырлау нәтиҗәсендә $3 \cdot 2 = 6$ кушылучы килеп чыгарга тиеш.

$$(3x^2 - 4xy + y^2) \cdot (2x + y) = 6x^3 + 3x^2y - 8x^2y - 4xy^2 + 2xy^2 + y^3 = \\ = 6x^3 - 5x^2y - 2xy^2 + y^3.$$

Мисал. Тапкырлауны эшләргә: $c^2 \cdot (c + 2)(c - 1)$.

Чишү. Гамәлләрне аерым-аерым эшлибез:

1) $c^2 \cdot (c + 2) = c^3 + 2c^2$.

2) $(c^3 + 2c^2) \cdot (c - 1) = c^4 - c^3 + 2c^3 - 2c^2 = c^4 + c^3 - 2c^2$.

Мисал. Гадиләштерергә: $10x^2 - (2x + y) \cdot (5x - y)$.

Чишү. Бу мисалда башта тапкырлауны эшләргә кирәк:

$$10x^2 - (2x + y)(5x - y) = 10x^2 - (10x^2 - 2xy + 5xy - y^2) = \underline{10x^2} - \\ - \underline{10x^2} + \underline{\underline{2xy}} - \underline{\underline{5xy}} + y^2 = -3xy + y^2.$$

Бу мисалны гамәлләр буенча эшләргә мөмкин иде:

1) $(2x + y) . (5x - y) = 10x^2 - 2xy + 5xy - y^2 = 10x^2 + 3xy - y^2$.

2) $10x^2 - (10x^2 + 3xy - y^2) = 10x^2 - 10x^2 - 3xy + y^2 = -3xy + y^2$.

Мисал. Күпбуын рәвешенә китерергә: $3a(2a - b) - (a - b)(6a - b)$.

Чишү. $3a(2a - b) - (a - b)(6a - b) = (6a^2 - 3ab) - (6a^2 - ab - -6ab + b^2) = \underline{6a^2} - \underline{3ab} - \underline{6a^2} + \underline{ab} + \underline{6ab} - b^2 = 4ab - b^2$.

Бу мисалны гамәлләр буенча эшлибез:

1) $3a(2a - b) = 6a^2 - 3ab$,

2) $(a - b)(6a - b) = 6a^2 - ab - 6ab + b^2 = 6a^2 - 7ab + b^2$,

3) $6a^2 - 3ab - (6a^2 - 7ab + b^2) = 6a^2 - 3ab - 6a^2 + 7ab - b^2 = 4ab - b^2$.

Мисал. $(x - 5)(x + 8) - (x + 4)(x - 1)$ аңлатмасының кыйммәте x ның кыйммәтләренә бәйле түгеллекне исбатлагыз.

Исбатлау. Гамәлләрне эшлибез:

1) $(x - 5)(x + 8) = x^2 + 8x - 5x - 40 = x^2 + 3x - 40$,

2) $(x + 4)(x - 1) = x^2 - x + 4x - 4 = x^2 + 3x - 4$,

3) $(x^2 + 3x - 40) - (x^2 + 3x - 4) = x^2 + 3x - 40 - x^2 - 3x + 4 = -40 + 4 = -36$.

Җавап: -36 га тигез. Димәк, аңлатманың кыйммәте x ның кыйммәтенә бәйле түгел.

Мисал. Тигезләмәне чишәргә: $(3x-2)(x+4)=3(x+5)(x-1)$.

Чишү. $3x^2+12x-2x-8=(3x+15)(x-1)$,

$3x^2+12x-2x-8=3x^2-3x+15x-15$,

$3x^2+12x-2x-3x^2+3x-15x=8-15$,

$12x-2x+3x-15x=8-15$,

$-2x=-7$,

$x=3{,}5$.

Мисал. Турыпочмаклыкның буе иненнән 2 см га зуррак. Әгәр буен 6 см га киметсәк, ә иңен 3 см га зурайтсак, мәйдан 27 $см^2$ га кимер. Турыпочмаклыкның баштагы үлчәмнәрен табарга.

Чишү. Таблица төзибез:

	Иңе, см	буе, см	мәйданы, $см^2$
Элек			
Хәзер			

Таблицаны тутыра башлыйк. Буе озынрак, димәк, иңе кечерәк була. Иңен x см дип билгелик. Буе, 2 см га зуррак булганлыктан, $(x+2)$ см булыр. Мәйданны табу өчен, буен иңенә тапкырларга кирәк.

	Иңе, см	буе, см	мәйданы, $см^2$
Элек	x	$x+2$	$x(x+2)$
Хәзер			

Буе $(x+2)$ см иде, 6 см га киметкәч, $x+2-6=x-4$ (см) булыр.

Иңе x см иде, 3 см га зурайткач, $(x+3)$ см булыр. Мәйданны табу өчен, буен иненә тапкырларга кирәк.

	Иңе, см	буе, см	мәйданы, $см^2$
Элек	x	$x+2$	$x(x+2)$
Хәзер	$x+3$	$x-4$	$(x+3)(x-4)$

Таблица тутырылды. Тигезләмә төзибез. Безнең шартта бирелгән 27$см^2$ саны катнашмады. Ул зурлык мәйданны күрсәтә, шуңа күрә мәйданнарны тигезлибез. Аларны рәттән язып куйыйк:

$$(x+3)\cdot(x-4) \qquad x(x+2).$$

Мәйдан кечерәйде, димәк, беренче аңлатма икенчесеннән кечерәк. Тигезләр өчен, кечерәгенә 27 не кушарга кирәк.

$$(x + 3) \cdot (x - 4) + 27 = x(x + 2).$$

Зуррагыннан 27 не алырга да мөмкин:

$$(x + 3) \cdot (x - 4) = x(x + 2) - 27.$$

Зуррак аңлатмадан кечерәген алырга мөмкин:

$$x(x + 2) - (x + 3)(x - 4) = 27.$$

Тигезләмәне чишәбез: $x^2 + 2x - x^2 + 4x - 3x + 12 = 27.$

$$3x = 15,\ x = 5.$$

Таблицага күз салыйк. x хәрефе белән иңне билгеләгән идек, димәк, иңе 5 см булган. Таблица буенча буе $(x + 2)$ см, x урынына кыйммәтен куеп, $5 + 2 = 7$ не табабыз. Димәк, буе 7 см булган.

Җавап: 5 см һәм 7 см.

Группалау юлы белән тапкырлаучыларга таркату

Мисал. $xy - 3y + 2x - 6$ ны тапкырлаучыларга таркатырга.

Чишү. Бу аңлатмада 4 кушылучы бар, ләкин аларның уртак тапкырлаучылары юк, димәк, җәя тышына чыгара алмыйбыз. Шулай да, беренче ике кушылучыда уртак y тапкырлаучысы, ә соңгы икесендә уртак 2 тапкырлаучысы барын күрергә була.

Икешәрләп группалыйбыз: $(xy - 3y) + (2x - 6)$. Җәя тышына чыгарабыз: $y(x - 3) + 2(x - 3)$. Ике кушылучы таптык, аларның уртак тапкырлаучысы, $(x - 3)$ җәясе бар. Аны җәя тышына чыгарабыз:

$$y(x - 3) + 2(x - 3) = (x - 3)(y + 2).$$

Кагыйдә. Группалау юлы белән күпбуынны тапкырлаучыларга таркату өчен түбәндәгеләрне эшләргә кирәк:

1) Җәяләр тышына нинди дә булса уртак тапкырлаучыны чыгарырлык итеп, кушылучыларны группаларга бүләргә.

2) Уртак тапкырлаучыларны җәя тышына чыгарырга.

3) Килеп чыккан кушылучыларда җәя — уртак тапкырлаучы булса, аны җәя тышына чыгарырга, булмаса, башкача группалап карарга.

Мисал. Тапкырлаучыларга таркатырга: $a^3 + a^2 + a + 1$.

Чишү. Барлык дүрт кушылучы өчен уртак тапкырлаучы юк. Шуңа күрә группалыйбыз:

$$a^3 + a^2 + a + 1 = (a^3 + a^2) + (a + 1) = a^2(a + 1) + (a + 1) = (a + 1)(a^2 + 1).$$

Беренче җәядән a^2 ны җәя тышына чыгарабыз. Ике кушылучы килеп чыкты. Аларда уртак $(a + 1)$ җәясе бар. Аны җәя тышына чыгарабыз. Кушылучылар икәү булганлыктан, җәя эчендә ике кушылучы калырга тиеш. Беренче кушылучыдан a^2, икенчесеннән 1 кала. Тикшерү өчен тапкырлап карасак, $2 \cdot 2 = 4$ кушылучы килеп чыгар.

Мисал. Тапкырлаучыларга таркатырга: $ab + 2b - 2a - 4$.

Чишү. $(ab + 2b) - (2a + 4)$.

Болай группалаганда икенче җәя алдына "минус" куярга туры килә, шунлыктан җәя эчендәге тамгалар да үзгәрә.

$$ab + 2b - 2b - 4 = (ab + 2b) - (2a + 4) = b(a + 2) -$$
$$- 2(a + 2) = (a + 2)(b - 2).$$

Мисал. Тапкырлаучыларга таркатырга: $21a + 8xy^3 - 24y^2 - 7axy$.

Чишү. $21a + 8xy^3 - 24y^2 - 7axy = (21a - 7axy) + (8xy^3 - 24y^2) =$ $= 7a(3 - xy) - 8y^2(xy - 3)=$

Ике кушылучы табылды, тик аларның җәя эчендәге тамгалары бертөрле түгел. Икенче җәя тышына (-1) не чыгарабыз:

$$= 7a(3 - xy) + 8y^2(3 - xy) = (3 - xy)(7a + 8y^2).$$

Мисал. Тапкырлаучыларга таркатырга:

$$5a^4c + 10a^3 - 6abc - 3a^2bc^2.$$

Чишү. Бу мисалда уртак тапкырлаучы a бар. Башта аны җәя тышына чыгарабыз, аннан соң группалыйбыз.

$$5a^4c + 10a^3 - 6abc - 3a^2bc^2 = a(5a^3c + 10a^2 - 6bc - 3abc^2) = a((5a^3c +$$
$$+ 10a^2) - (6bc + 3abc^2)) = a(5a^2(ac + 2) - 3bc(2 + ac)) =$$
$$= a(ac + 2)(5a^2 - 3bc).$$

Мисал. Исәпләргә: $43 \cdot 29 + 27 \cdot 11 + 43 \cdot 11 + 27 \cdot 29$.

Чишү. Һәр гамәлне аерым эшләргә дә булыр иде, тик группалау юлы белән мисал җиңелрәк чишелә.

$$43 \cdot 29 + 27 \cdot 11 + 43 \cdot 11 + 27 \cdot 29 = (43 \cdot 29 + 43 \cdot 11) +$$
$$+ (27 \cdot 11 + 27 \cdot 29) = 43(29 + 11) + 27(11 + 29) =$$
$$= (11 + 29)(43 + 27) = 40 \cdot 70 = 2800.$$

12 нче зачет

1. Күпбуыннарны тапкырлау кагыйдәсе.
2. Группалау юлы белән тапкырлаучыларга таркату кагыйдәсе.

12 нче контроль эш

1. Аңлатманы гадиләштерегез:

$$6b^2 - (2b + 3c + 1) \cdot (3b - 2).$$

2. Турыпочмаклыкның буе иңеннән 10 см га зуррак. Әгәр иңен 1 см га, ә буен 5 см га зурайтсак, мәйданы 45 см^2 га зураер. Турыпочмаклыкның баштагы иңен һәм буен табарга.

3. Тапкырлаучыларга таркатырга:

а) $a^3 - 14a^2 - 2a + 28$.

б) $6xy - 2y^2 + 9x - 3y$.

§ 13. КВАДРАТЛАР АЕРМАСЫ

Мисаллар. Тапкырлауны эшләргә:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2,$$
$$(x + 3) \cdot (x - 3) = x^2 - 3x + 3x - 9 = x^2 - 9,$$
$$(2a + 3b) \cdot (2a - 3b) = 4a^2 - 6ab + 6ab - 9b^2 = 4a^2 - 9b^2.$$

Бу мисалларда ике аңлатманың суммасы шушы ук аңлатмаларның аермасына тапкырлана. Һәрбер җәя эчендә икешәр кушылучы, шуңа күрә җавапта $2 \cdot 2 = 4$ кушылучы килеп чыга. Тик икенче һәм өченче кушылучылар охшаш һәм кушкач нульгә тигезләнәләр.

$$-ab + ab = 0, \quad -3x + 3x = 0, \quad -6ab + 6ab = 0.$$

Җавапта ике генә кушылучы кала. Җавапларны тикшереп карыйк. Җавапның беренче кушылучысы беренче җәянең беренче кушылучысын икенче җәянең беренче кушылучысына тапкырлап табыла, бу кушылучылар тигез булганлыктан, җавапта беренче кушылучының квадраты була.

Җавапның икенче кушылучысы беренче җәянең икенче кушылучысын икенче җәянең икенче кушылучысына тапкырлап табыла, бу кушылучылар үзара тигез булганлыктан, тапкырчыгыш икенче кушылучының квадратын бирә. Ә бу кушылучылар капма-каршы тамгалы, шуңа күрә җавапта һәрвакыт "минус" тамгасы була.

Шулай итеп, ике аңлатма суммасын шушы ук аңлатмалар аермасына тапкырлаганда җавапта дүрт кушылучы табыла, тик ике урта буын кушуны башкарганда һәрвакыт нульне биргәнлектән, җавапта ике генә кушылучы кала.

Бу кушылучылар шарттагы җәяләр эчендәге кушылучыларның квадратларына тигез һәм алар арасына "минус" тамгасы куела.

Мондый җәяләрне тапкырлау өчен арадагы исәпләүләрне эшләп тормыйлар, ә җавапны гына язалар.

Мисал. Тапкырлауны эшләргә: $(c + 5) \cdot (c - 5)$.

Чишү. $(c + 5) \cdot (c - 5) = c^2 - 25$.

Мондый тапкырлау кыскача тапкырлау дип атала.

Кагыйдә. *Ике аңлатма суммасының аларның аермасына тапкырчыгышы бу аңлатмаларның квадратлары аермасына тигез.*

$$(\Delta + \square) \cdot (\Delta - \square) = \Delta^2 - \square^2.$$

Бу — беренче кыскача тапкырлау формуласы.

Мисал. Тапкырлауны эшләргә:

$$(c - x) \cdot (c + x) = c^2 - x^2,$$
$$(2x + 5y) \cdot (2x - 5y) = 4x^2 - 25y^2,$$
$$(2x^2y - 3) \cdot (2x^2y + 3) = 4x^4y^2 - 9.$$

Тапкырлауны телдән эшли алсагыз, җавапны гына язып куегыз:

$$(3a + 5) \cdot (3a - 5) = 9a^2 - 25.$$

Әгәр сезнең өчен алай эшләү кыенрак булса, исәпләүләрне бербер артлы эшләгез:

$$(4x^3b - 5c^4)\cdot(4x^3b + 5c^4) = 16x^6b^2 - 25c^8.$$

1) $(4x^3b)^2 = 4x^3b\cdot 4x^3b = 16x^6b^2$,

2) $(5c^4)^2 = 5c^4 5c^4 = 25c^8$.

Мисал. Тапкырлауны эшләгез: $(3ab + 1)\cdot(3ab - 2)$.

Чишү. Бу тапкырлауны формула буенча гына эшләп булмый, чөнки җәяләр эчендәге аңлатмалар төрле, шуңа күрә күпбуынны күпбуынга тапкырлау кагыйдәсе буенча эшлибез.

$$(3ab + 1)\cdot(3ab - 2) = 9a^2b^2 - 6ab + 3ab - 2 = 9a^2b^2 - 3ab - 2.$$

Мисал. Исәпләргә: $(100 - 1)\cdot(100 + 1)$.

Чишү. Җәяләр эчендәге гамәлләрне эшләргә һәм аннан соң тапкырларга мөмкин, ләкин формуланы куллану уңайрак.

$$(100 - 1)(100 + 1) = 100^2 - 1^2 = 10\,000 - 1 = 9999.$$

Мисал. Исәпләргә: $29\cdot 31$.

Чишү. $29 = 30 - 1$ һәм $31 = 30 + 1$ икәнен искәртик.

$$29\cdot 31 = (30 - 1)\cdot(30 + 1) = 30^2 - 1^2 = 900 - 1 = 899.$$

Кире мәсьәлә

Мисал. Ике аңлатма суммасын аларның аермасына тапкырлагач, $100 - a^2$ килеп чыккан. Нинди күпбуыннарны тапкырлаганнар?

Чишү. Кыскача тапкырлау формуласына карыйбыз. Уң һәм сул якларның урыннарын алыштырабыз:

$$\Delta^2 - \square^2 = (\Delta + \square)\cdot(\Delta - \square).$$

Икенче төрле әйткәндә, квадратлар аермасын сумма белән аерманың тапкырчыгышы рәвешендә язарга мөмкин. Җәяләр эчендә нинди кушылучылар булуын гына беләсе калды. 100 санына игътибар итик, ул 10 ның квадратына тигез, чөнки $10\cdot 10 = 100$. Ә a^2 исә a санының квадраты була. Шулай итеп,

$$100 - a^2 = (10 - a)(10 + a).$$

Икенче төрле әйткәндә, без квадратлар аермасын тапкырлаучыларга таркаттык.

Кагыйдә. *Ике аңлатманың квадратлары аермасы аларның суммасы белән аермасы тапкырчыгышына тигез.*

Мисал. Тапкырлаучыларга таркатырга: $4a^2 - b^2 = (2a - b)(2a + b)$, $1 - 36c^2 = (1 - 6c)(1 + 6c)$, $121c^{10} - 625x^8 = (11c^5 - 25x^4)(11c^5 + 25x^4)$.

$9y^2 + 1$ — бу аңлатма тапкырлаучыларга таркалмый, чөнки ул квадратларның аермасы түгел, ә суммасы.

Мисал. Тапкырлаучыларга таркатырга: $(2a + 1)^2 - 49$.

Чишү. Бу аңлатманың беренче өлеше — җәя эчендәге аңлатма.

$$(2a + 1)^2 - 49 = ((2a + 1) - 7)\cdot((2a + 1) + 7) = (2a + 1 - 7)\times$$
$$\times(2a + 1 + 7) = (2a - 6)(2a + 8).$$

Мисал. Тапкырлаучыларга таркатырга: $(5x - 2y)^2 - (5x + 2y)^2$.

Чишү. Бу мисалда беренче һәм икенче аңлатмалар җәяне бирә.

$$(5x-2y)^2-(5x+2y)^2=((5x-2y)+(5x+2y))\cdot((5x-2y)-(5x+2y))=$$
$$=(5x-2y+5x+2y)(5x-2y-5x-2y)=10x(-4y)=-40xy.$$
$$(2a+3)^2-(3a-2)^2=((2a+3)+(3a-2))((2a+3)-(3a-2))=$$
$$=(2a+3+3a-2)\cdot(2a+3-3a+2)=(5a+1)(-a+5).$$

Мисал. Тигезләмәне чишәргә: $441x^2-0{,}04=0$.

Чишү. Билгесез зурлык x икенче дәрәҗәдә булганлыктан, билгелеләрне тигезлекнең бер ягына, билгесезләрне икенче ягына күчерүдән мәгънә юк. Аңлатманы тапкырлаучыларга таркатабыз.

$$(21x-0{,}2)(21x+0{,}2)=0.$$

Тапкырчыгыш тапкырлаучыларның берәрсе нульгә тигез булганда гына нульгә тигез. Тигезләмә ике гади тигезләмәгә таркала:

$$(21x-0{,}2)=0 \quad \text{һәм} \quad 21x+0{,}2=0$$
$$21x=0{,}2 \qquad\qquad 21x=-0{,}2$$
$$x=0{,}2:21 \qquad\qquad x=-0{,}2:21$$

$$x_1=\frac{0{,}2}{21}=\frac{2}{210}=\frac{1}{105} \qquad x_2=-\frac{0{,}2}{21}=-\frac{2}{210}=-\frac{1}{105}.$$

13 нче зачет

1. Ике аңлатма суммасын аларның аермасына тапкырлау кагыйдәсе.
2. Квадратлар аермасын тапкырлаучыларга таркату кагыйдәсе.

13 нче контроль эш

1. Кыскача тапкырлауны эшләгез:

а) $(4-3a)(4+3a)$, б) $(a^2-b)(a^2+b)$, в) $(5x+1)(5x-1)$.

2. Тапкырлаучыларга таркатыгыз:

а) $100-x^2$, б) $160a^2-1$, в) $0{,}25c^6-0{,}01y^8$.

§ 14. СУММАНЫҢ ҺӘМ АЕРМАНЫҢ КВАДРАТЫ

Сумманың квадраты

Мисал. Гамәлләрне эшләргә: $(a+b)^2$.

Чишү. Аңлатманы квадратка күтәрү аны үз-үзенә тапкырлау дигән сүз: $(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)$. Бу күпбуыннарны тапкырлыйк:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2.$$

Башта дүрт кушылучы булды, шуларның икесе охшаш буыннар иде, аларны берләштердек.

Мисаллар. Тапкырлауны эшләгез:

$$(x+y)^2=(x+y)(x+y)=x^2+xy+xy+y^2=x^2+2xy+y^2.$$
$$(a+10)^2=(a+10)(a+10)=a^2+10a+10a+100=$$
$$=a^2+20a+100.$$

Һәрвакыт бер үк формадагы җавап килеп чыкканлыктан, җавапны гына язарга мөмкин.

Кагыйдә. *Ике аңлатма суммасының квадраты беренче санның квадраты, плюс беренче санның икенче санга икеләтелгән тапкырчыгышы, плюс икенче санның квадратына тигез.*

Бу очракта шуны истән чыгармаска кирәк: чынлыкта, ике кушылучыны ике кушылучыга тапкырлагач, дүрт кушылучы килеп чыга, урта буыннар охшаш һәм үзара тигез булганлыктан, алар кушылалар һәм суммада икеләтелгән тапкырчыгыш барлыкка килә.

Мисал. Гамәлләрне эшләргә: $(5a + 3b)^2$.

Чишү. $(5a + 3b)^2 = (5a)^2 + 2 \cdot 5a \cdot 3b + (3b)^2 = 25a^2 + 30ab + 9b^2$.

$$(4x + 7y)^2 = (4x)^2 + 2 \cdot 4x \cdot 7y + (7y)^2 = 16x^2 + 56xy + 49y^2.$$

$$(6y^3 + 9)^2 = (6y^3)^2 + 2 \cdot 6y^3 \cdot 9 + 9^2 = 36y^6 + 108y^3 + 81.$$

Аерманың квадраты

Мисал. Гамәлләрне эшләргә: $(a - b)^2$.

Чишү. Аңлатманы квадратка күтәрү аны үз-үзенә тапкырлау дигән сүз: $(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b)$.

Бу күпбуыннарны тапкырлыйбыз:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Башта дүрт кушылучы барлыкка килде, тик уртадагы ике кушылучы охшаш булып чыкты: $-ab - ab = -1ab - 1ab = -2ab$.

Мисал. Тапкырлауны эшләргә: $(c - x)^2 = (c - x)(c - x) = c^2 - cx - - cx + x^2 = c^2 - 2cx + x^2$.

Һәрвакыт шуңа охшаш җавап килеп чыгачак, шуңа күрә тапкырлауның җавабын шунда ук язарга мөмкин.

Кагыйдә. *Ике аңлатма аермасының квадраты беренче аңлатманың квадраты минус беренче аңлатманың икенче аңлатмага икеләтелгән тапкырчыгышы плюс икенче аңлатманың квадратына тигез.*

$$(\Delta - \square)^2 = \Delta^2 - 2 \cdot \Delta \cdot \square + \square^2.$$

Шунысын истән чыгармаска кирәк: ике кушылучыны ике кушылучыга тапкырлаганда дүрт кушылучы барлыкка килә, ләкин уртадагы икесе охшаш һәм шунлыктан формулада икеләтелгән тапкырчыгыш килеп чыга.

Мисаллар. Гамәлләрне эшләргә:

$$(3x - 4y)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 4y + (4y)^2 = 9x^2 - 24xy + 16y^2.$$

$$(0{,}2c^4 - 5x^3)^2 = (0{,}2c^4)^2 - 2 \cdot 0{,}2c^4 \cdot 5x^3 + (5x^3)^2 = 0{,}04c^8 - 2c^4x^3 + 25x^6.$$

Мисал. Исәпләргә: $(70 + 3)^2$.

Чишү. Билгеле, 73 не генә дә квадратка күтәрергә мөмкин, ләкин формуланы кулланабыз:

$$(70 + 3)^2 = 70^2 + 2 \cdot 70 \cdot 3 + 3^2 = 4900 + 420 + 9 = 5329.$$

Мисал. Исәпләргә: 102^2 һәм 999^2.

Чишү. $102^2 = (100+2)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 2 + 2^2 =$
$= 10\,000 + 400 + 4 = 10\,404.$
$999^2 = (1000-1)^2 = 1000^2 - 2 \cdot 1000 \cdot 1 + 1^2 =$
$= 1\,000\,000 - 2000 + 1 = 998\,001$

Кайбер очракларда ике кушылучысы да "минус" тамгасы белән булган җәяләрне дә квадратка күтәрергә туры килә.

Мисал. Гамәлләрне эшләргә: $(-3a-4b)^2$.

Чишү. Җәя тышына -1 не чыгарабыз, ләкин мондый җәяләр икәү булганлыктан, аларның һәрберсеннән дә -1 не чыгарырга мөмкин. Тапкырлагач, алар $+1$ не бирәләр.

$$(-3a-4b)^2 = (3a+4b)^2 = (3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot 4b + (4b)^2 = 9a^2 + 24ab + 16b^2.$$

Катлаулырак мисалларны чишеп карыйк.

Мисал. Гадиләштерергә: $(x+y)^2 - (x-y)(x+y)$.

Чишү. Беренче җәя — сумманың квадраты. Икенче җәя — квадратлар аермасы.

$$(x+y)^2 - (x-y)(x+y) = (x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - $$
$$- y^2) = x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + y^2 = 2y^2 + 2xy.$$

Мисал. Гадиләштерергә: $y \cdot (y-2) - (y-2)^2$.

Чишү. Икенче җәя алдында "минус" тамгасы тора, шуңа күрә, җәяләрне ачканда, барлык тамгалар да үзгәрә.

$$y \cdot (y-2) - (y-2)^2 = y^2 - 2y - y^2 + 4y - 4 = 2y - 4.$$

Мисал. Гадиләштерергә: $2(3x+4y)^2 - 3(2x-5y)^2$.

Чишү. Исәпләүләрне гамәлләр буенча эшлибез:

1) $(3x+4y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 4y + (4y)^2 = 9x^2 + 24xy + 16y^2$;
2) $2 \cdot (9x^2 + 24xy + 16y^2) = 18x^2 + 48xy + 32y^2$;
3) $(2x-5y)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5y + (5y)^2 = 4x^2 - 20xy + 25y^2$;
4) $3(4x^2 - 20xy + 25y^2) = 12x^2 - 60xy + 75y^2$;
5) $18x^2 + 48xy + 32y^2 - (12x^2 - 60xy + 75y^2) = 18x^2 + 48xy + 32y^2 -$
$-12x^2 + 60xy - 75y^2 = 6x^2 + 108xy - 43y^2$.

Мисал. Тигезләмәне чишәргә:

$$(8y-1)(2y+3) - (4y-5)^2 = 158.$$

Чишү. $(16y^2 - 3 - 2y + 24y) - (16y^2 - 40y + 25) = 158.$

$$62y = 158 + 3 + 25$$
$$62y = 186$$
$$y = 3.$$

Өчбуынны тапкырлаучыларга таркату

Сумманың квадраты һәм аерманың квадраты формулалары өчбуыннарны тапкырлаучыларга таркату өчен кулланыла. Моның өчен формулаларның уң һәм сул якларының урыннарын алыштырып куярга кирәк.

$$\Delta^2 + 2\Delta \cdot \square + \square^2 = (\Delta + \square)^2,$$
$$\Delta^2 - 2 \cdot \Delta \cdot \square + \square^2 = (\Delta - \square)^2.$$

М и с а л. Тапкырлаучыларга таркатырга: $x^2 - 2xy + y^2$.

Ч и ш ү. Аңлатманы тикшерәбез. Анда бер аңлатманың квадраты бар: x^2, шулай ук икенче аңлатманың квадраты да бар: y^2. Бу аңлатмаларның икеләтелгән тапкырчыгышы $2xy$ та бар. Димәк, бу — аерманың квадраты, чөнки икеләтелгән тапкырчыгыш алдында "минус" тамгасы тора.

Мисал. Тапкырлаучыларга таркатырга:

$$16a^2 + 40ab + 25b^2.$$

Чишү. Өчбуынны тапкырлаучыларга таркату өчен аны түбәндәгечә күрсәтергә кирәк:

$$16a^2 + 40ab + 25b^2 = ?^2 + 2 \cdot ? \cdot ? + ?^2.$$

Кушылучыларны тикшерик:

$$16a^2 = (4a)^2, \qquad 25b^2 = (5b)^2.$$

Димәк, беренче кушылучы $4a$, икенчесе $5b$ га тигез була. Аларның икеләтелгән тапкырчыгышын төзик: $2 \cdot 4a \cdot 5b = 40ab$. Шулай ук, шартта да $40\,ab$. Шулай итеп, сумманың квадраты формуласын кулланабыз:

$$16a^2 + 40ab + 25b^2 = (4a + 5b)^2.$$

Кагыйдә. Өчбуынны сумманың квадраты яки аерманың квадраты формулалары буенча тапкырлаучыларга таркату өчен түбәндәгеләрне эшләргә кирәк:

1. Квадраты буенча беренче аңлатманы табарга.
2. Квадраты буенча икенче аңлатманы табарга.
3. Бу аңлатмаларның икеләтелгән тапкырчыгышын төзергә һәм шарттагы аңлатма белән чагыштырырга. Әгәр аңлатмалар үзара тигез булса, формуланы кулланырга мөмкин.

М и с а л. Тапкырлаучыларга таркатырга: $9x^2 - 12xy + 4y^2$.

Ч и ш ү. $9x^2 = (3x)^2, \qquad 4y^2 = (2y)^2$.

Димәк, аңлатмалар $3x$ һәм $2y$ булырга тиеш.

Аларның икеләтелгән тапкырчыгышы $2 \cdot 3x \cdot 2y = 12xy$. Шарт буенча да $12xy$ бар. Формуланы куллана алабыз. Формулада минус тамгасы тора, шуңа күрә сумманың түгел, аерманың квадратына тигез дибез.

$$9x^2 - 12xy + 4y^2 = (3x - 2y)^2.$$

Хәзер инде сез тапкырлаучыларга таркатуның берничә ысулы белән таныштыгыз.

1. Уртак тапкырлаучыны җәя тышына чыгару.
2. Группалап таркату.
3. Квадратлар аермасы, сумманың һәм аерманың квадратларының кыскача тапкырлау формулаларын куллану.

Гадәттә, иң беренче, җәя тышына чыгарырга мөмкинме-юкмы икәнлеген карарга кирәк. Уртак тапкырлаучы булмаса, группалау ысулын кулланып булмыймы дип тикшерергә була. Соңыннан, кыскача тапкырлау формулаларын куллану мөмкинлеген ачыклыйлар.

Мисал. Тапкырлаучыларга таркатырга: $ax^4 - a^3x^2$.

Чишү. ax^2 ны җәя тышына чыгарыйк:

$$ax^4 - a^3x^2 = ax^2(x^2 - a^2) = ax^2(x - a)(x + a).$$

Җәяләр эчендә квадратлар аермасы.

Мисал. Тапкырлаучыларга таркатырга: $x^5 - 8x^3y^2 + 16xy^4$.

Чишү. x ны җәя тышына чыгарабыз:

$$x^5 - 8x^3y^2 + 16xy^4 = x(x^4 - 8x^2y^2 + 16y^4) = x(x^2 - 4y^2)^2.$$

Җәя эчендә аерманың квадраты.

Мисал. Тапкырлаучыларга таркатырга: $x^2 + 2xy + y^2 - 1$.

Чишү. Бу аңлатмада җәяләр тышына бер санны да чыгарып булмый. Группалауның да мәгънәсе юк. Шулай да беренче өч кушылучының сумманың квадраты икәне күренә:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 1 = (x + y)^2 - 1 = (x + y - 1) \cdot (x + y + 1).$$

Квадратлар аермасы килеп чыкты.

14 нче зачет

1. Нәрсә ул сумманың квадраты?
2. Нәрсә ул аерманың квадраты?
3. Аерманың квадраты һәм сумманың квадраты формулалары буенча өчбуынны тапкырлаучыларга ничек таркатырга?

14 нче контроль эш

1. Гамәлләрне эшләгез:

$$(4a - 5c)^2, \quad (\tfrac{1}{3}x - 5y)^2, \quad (10x - 3y)^2, \quad (0{,}6c - 4y)^2.$$

2. Тапкырлаучыларга таркатырга:

$$n^2 + 4n + 4, \quad 4b^2 - 20b + 25, \quad x^2 - 30x + 225.$$

3. $a = 3$ булганда, $(3a - 5)^2 - 3a \cdot (3a - 1)$ аңлатмасының кыйммәтен табыгыз.

§ 15. КУБЛАР СУММАСЫ ҺӘМ АЕРМАСЫ

Сез инде кыскача тапкырлау формулалары белән таныштыгыз.

$(\Delta + \square) \cdot (\Delta - \square) = \Delta^2 - \square^2$ — квадратлар аермасы

$(\Delta + \square)^2 = \Delta^2 + 2 \cdot \Delta \cdot \square + \square^2$ — сумманың квадраты

$(\Delta - \square)^2 = \Delta^2 - 2\Delta\square + \square^2$ — аерманың квадраты

$\Delta^2 + \Delta \cdot \square + \square^2$ аңлатмасы сумманың тулы булмаган квадраты дип атала. $\Delta^2 - \Delta \cdot \square + \square^2$ аңлатмасы аерманың тулы булмаган квад-

раты дип атала. Бу аңлатмаларда икеләтелгән тапкырчыгыш түгел, ә гади тапкырчыгыш кына булганлыктан, алар тулы булмаган квадратлар дип аталалар. Бу аңлатмаларның бер үзлеге бар. Сумманың тулы булмаган квадратын аермага тапкырлагач, кублар аермасы килеп чыга. Аерманың тулы булмаган квадратын суммага тапкырлагач, кублар суммасы табыла. Тикшереп карыйк.

$$(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3=a^3-b^3.$$

Охшаш буыннарны берләштергәч, $a^2b-a^2b=0$ һәм $ab^2-ab^2=0$ булды.

Кагыйдә. *Ике аңлатма суммасын аларның аермасының тулы булмаган квадратына тапкырлагач, бу аңлатмаларның кублары суммасы килеп чыга.*

$$(\Delta+\Box)\cdot(\Delta^2-\Delta\cdot\Box+\Box^2)=\Delta^3+\Box^3.$$

Мисал. $(x+c)\cdot(x^2-cx+x^2)=x^3+c^3.$

Кагыйдә. *Ике аңлатма аермасын аларның суммасының тулы булмаган квадратына тапкырлагач, бу аңлатмаларның куб- лары аермасы килеп чыга.*

$$(\Delta-\Box)(\Delta^2+\Delta\Box+\Box^2)=\Delta^3-\Box^3.$$

Мисал. $(b-x)(b^2+bx+x^2)=b^3-x^3.$
Киресенчә ничек була?

Кагыйдә. *Кублар аермасы ике тапкырлаучыга — аларның аермасына һәм суммасының тулы булмаган квадратына таркала.*

Мисал. Тапкырлаучыларга таркатырга: $8a^3-1$.
Чишү. $8a^3-1=(2a-1)(4a^2+2a+1)$.

Кагыйдә. *Кублар суммасы ике тапкырлаучыга — аларның суммасына һәм аерманың тулы булмаган квадратына таркала.*

Мисал. Тапкырлаучыларга таркатырга: $125+x^6$.
Чишү. $125+x^6=5^3+(x^2)^3=(5+x^2)(25-5x^2+x^4)$.
Мисал. Тапкырлаучыларга таркатырга: $1000p^{12}+64k^{30}$.
Чишү. $1000p^{12}+64k^{30}=(10p^4)^3+(4k^{10})^3=(10p^4+4k^{10})(100p^8-40p^4k^{10}+16k^{20})$.
Мисал. 327^3+173^3 аңлатмасының 500 гә бүленүен исбатларга.
Исбатлау. Аңлатманы тапкырлаучыларга таркатырга.

$$327^3+173^3=(327+173)(327^2-327\cdot173+173^2)=$$
$$=500(327^2-327\cdot173+173^2).$$

500 саны җәя эчендәге аңлатмага тапкырлана, димәк, тапкырчыгыш та 500 гә бүленә дигән сүз. Шуны исбатларга кирәк иде дә. Катлаулырак мисаллар чишеп карыйк.

Мисал. Тапкырлаучыларга таркатырга: $(a+b)^3-0{,}001$.

Чишү. $(a+b)^3-0{,}001=(a+b)^3-(0{,}1)^3=(a+b-0{,}1)\cdot((a+b)^2+(a+b)\cdot 0{,}1+0{,}1^2)=(a+b-0{,}1)\cdot(a^2+2ab+b^2+0{,}1a+0{,}1b+0{,}01)$.

Бу мисалда беренче аңлатма урынында $(a+b)$ тора.

Мисал. Тапкырлаучыларга таркатырга: $(x+y)^3-(2x-y)^3$.

Чишү. $(x+y)^3-(2x-y)^3=(x+y-2x+y)((x+y)^2+(x+y)\times(2x-y)+(2x-y)^2)=(-x+2y)(x^2+2xy+y^2+2x^2-xy+2xy-y^2+$

$$+4x^2-4xy+y^2)=(-x+2y)(7x^2-xy+y^2).$$

15 нче зачет

1. Ике аңлатма суммасын алар аермасының тулы булмаган квадратына тапкырлагач, нинди аңлатма табыла?
2. Ике аңлатма аермасын алар суммасының тулы булмаган квадратына тапкырлагач, нинди аңлатма табыла?
3. Кублар суммасы нинди тапкырлаучыларга таркала?
4. Кублар аермасы нинди тапкырлаучыларга таркала?

15 нче контроль эш

Тапкырлаучыларга таркатыгыз:

$8a^3-a^2+4a^4$,	$25-10c+c^2$,
$4b^2-1$,	$8a^3-1$,
$9x^2-12xy+4y^2$.	$125x^3+y^3$.

§ 16. ТИГЕЗЛӘМӘЛӘР СИСТЕМАЛАРЫ

Үз эченә билгесез зурлыкны алган тигезлекне без тигезләмә дигән идек. Мәсәлән,

$$2x-3=11, \qquad x+2x+3x=-90.$$

Тигезләмәне чишү — билгесез зурлыкның тигезләмәне дөрес тигезлеккә әйләндерә торган кыйммәтләрен табу дигән сүз.

$3x-11=19$ тигезләмәсенең $x=10$ булган бер тамыры бар. $x=10$ булганда $3x-11=3\cdot 10-11=19$, тигезләмәнең шартында да 19, ягъни дөрес тигезлек килеп чыга.

Тигезләмәдә берничә билгесез булырга мөмкин, мәсәлән, $x+y=15$. Бу тигезләмәнең чишелешләре булып суммалары 15 кә тигез булган саннар парлары торганын күрергә мөмкин, мәсәлән, 5 һәм 10, 1 һәм 14, −2 һәм 17. Мондый саннар парлары искиткеч күп.

Мисал. $2x+y=25$ тигезләмәсенең өч чишелешен табарга.

Чишү. 10 һәм 5 саннарының тигезләмәнең бер чишелеше булуын күрергә мөмкин, чөнки $2\cdot 10+5=25$. Шулай ук башка саннар парларын да эзләп табарга булыр иде, ләкин җиңелрәк ысул бар: $2x$ ны сул яктан уң якка чыгарабыз. $y=25-2x$. Хәзер исә, x ка теләсә нинди кыйммәтләр биреп, аның буенча y ны исәпләргә мөмкин.

$x = 7$ булганда, $y = 25 - 2x = 25 - 2 \cdot 7 = 25 - 14 = 11$;
$x = 0{,}1$ булганда, $y = 25 - 2x = 25 - 2 \cdot 0{,}1 = 25 - 0{,}2 = 24{,}8$ һ. б.

Җавап: $x_1 = 10$ $y_1 = 5$,
$x_2 = 7$, $y_2 = 11$,
$x_3 = 0{,}1$, $y_3 = 24{,}8$.

Билгеләмә. Бергә чишелә торган ике билгесезле ике тигезләмә **тигезләмәләр системасы** дип атала.

Билгеләмә. **Тигезләмәләр системасын чишү** — билгесезләрнең ике тигезләмәне дә дөрес тигезлеккә әйләндерә торган кыйммәтләрен табу дигән сүз.

Мисал. Тигезләмәләр системасы бирелгән:

$$\begin{cases} x + y = 20, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

(5, 10), (12, 10), (11, 9) саннар парларының кайсылары бу системаның чишелеше булыр?

Чишү. Беренче парны алып, аны ике тигезләмәгә дә куеп карыйк.

$$\begin{cases} 5 + 10 = 15, \\ 5 - 10 = -5. \end{cases}$$

Икенче тигезлектән бу саннарның икенче тигезләмәнең тамырлары булмавын, ә бары беренчесенең генә тамырлары булуын күрәбез.

Тигезләмәләргә икенче парны куйыйк:

$$\begin{cases} 12 + 10 = 22, \\ 12 - 10 = 2. \end{cases}$$

Бу саннар бары тик икенче тигезләмәнең генә тамырлары булалар, беренче тигезләмәне канәгатьләндермиләр.

Тигезләмәләргә өченче парны куябыз:

$$11 + 9 = 20,$$
$$11 - 9 = 2.$$

Ике тигезләмә дә, бу саннарны куйгач, дөрес тигезлеккә әйләнә. Шунлыктан, алар тигезләмәләр системасының тамырлары булырлар.

Җавап: (11, 9).

Тигезләмәләр системасын алыштырып кую юлы белән чишү

Мисал. Тигезләмәләр системасын чишәргә:

$$\begin{cases} 3x + y = 10, \\ 2x - 5y = 1. \end{cases}$$

Чишү. Беренче тигезләмәдә, $3x$ ны тигезлекнең икенче ягына чыгарып куеп, y ны x аша күрсәтәбез: $y = 10 - 3x$. Бу аңлатманы икенче тигезләмәгә y урынына куябыз:

$$2x - 5y = 1,$$
$$2x - 5 \cdot (10 - 3x) = 1.$$

Бу тигезләмәне чишәбез:

$$2x - 50 + 15x = 1,$$
$$2x + 15x = 1 + 50,$$
$$17x = 51,$$
$$x = 3.$$

y нын кыйммәтен табасы калды. Моның өчен x ның кыйммәтен y өчен тапкан формулага куябыз: $y = 10 - 3x$.

$$y = 10 - 3x = 10 - 3 \cdot 3 = 10 - 9 = 1.$$

Җавап: $x = 3$, $y = 1$.

Кагыйдә. Тигезләмәләр системасын алыштырып кую юлы белән чишү өчен түбәндәгеләрне эшләргә кирәк:

1. *Тигезләмәләрнең берсендә бер билгесезне икенчесе аша күрсәтергә.*
2. *Бу аңлатманы икенче тигезләмәгә тиешле билгесез урынына куярга.*
3. *Килеп чыккан тигезләмәне чишәргә.*
4. *Билгесезнең табылган кыйммәте аша икенче билгесез зурлыкны табарга.*
5. *Җавапны язарга.*

Мисал. Тигезләмәләр системасын чишәргә:

$$\begin{cases} 4x - 5y = 50, \\ x + 3y = 4. \end{cases}$$

Чишү. Башта ук кайсы үзгәрешлене кайсысы белән алыштыру турында сорау туа. Гадәттә, коэффициенты 1 яки -1 булган үзгәрешлене икенчесе аша билгеләү җиңелрәк була. Безнең очракта, икенче тигезләмәдәге x ны алыштыру уңайрак:

$$x = 4 - 3y.$$

Беренче тигезләмәдәге x ны бу аңлатма белән алыштырабыз:

$$4x - 5y = 50,$$
$$4(4 - 3y) - 5y = 50.$$

Бу тигезләмәне чишәбез:

$$16 - 12y - 5y = 50,$$
$$-12y - 5y = 50 - 16,$$
$$-17y = 34,$$
$y = -2$. x ны табасы кала.

x өчен без $x = 4 - 3y$ аңлатмасын тапкан идек. Хәзер аңа y ның табылган кыйммәтен, -2 не куйыйк.

$$x = 4 - 3y = 4 - 3 \cdot (-2) = 4 + 6 = 10.$$

Җавап: $x = 10$, $y = -2$.

Тигезләмәләр системасын кушу юлы белән чишү

Мисал. Тигезләмәләр системасын чишәргә:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ 4x - 3y = -2. \end{cases}$$

Чишү. Әгәр бу системаны алыштырып кую юлы белән чишәргә уйласак, 1 коэффициентлы бер генә билгесез дә булмаганлыктан, бер билгесезне икенчесе аша аңлатканда, катлаулы аңлатма килеп чыгар иде. Мәсәлән, беренче тигезләмәдәге x ны табып карыйк.

$$2x + 3y = 8, \quad 2x = 8 - 3y, \quad x = \frac{8 - 3y}{2}.$$

Бу аңлатманы икенче тигезләмәдәге x урынына куярга мөмкин, ләкин бик катлаулы. Ике тигезләмәне дә игътибар белән карасак, y үзгәрешлесенең коэффициентлары модульләре буенча тигез, ә тамгалары буенча капма-каршы икәнлеген күрербез. Бу $-3y$ һәм $3y$ аңлатмалары.

$$+\begin{matrix} 2x + 3y = 8, \\ 4x - 3y = -2. \end{matrix}$$ Тигезләмәләрне буынлап кушабыз.

$\overline{2x + 4x + 3y} - 3y = 8 + (-2)$, ләкин $3y - 3y = 0$.

$2x + 4x = 8 - 2$. Бу тигезләмәне чишәбез.

$6x = 6$,

$x = 1$. y ның кыйммәтен табасы калды.

Теләсә кайсы тигезләмәгә x ның әле табылган 1 кыйммәтен куябыз.

$2x + 3y = 8$,

$2 \cdot 1 + 3y = 8$. Бу тигезләмәне чишәбез.

$3y = 8 - 2$,

$y = 2$.

Җавап: $x = 1$, $y = 2$.

Мисал. Тигезләмәләр системасын чишәргә:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 3x + 4y = 11. \end{cases}$$

Чишү. Бу системадагы тигезләмәләрдә коэффициенты 1 булган үзгәрешлеләр юк, шуңа күрә кушу юлы белән чишәбез. Шулай ук капма-каршы тамгалы бертөрле коэффициентлар да юк.

x алдындагы коэффициентларны карыйбыз: 2 һәм 3 саннары. Аларны тигезләү өчен беренчесен 3 кә, икенчесен 2 гә тапкырлыйбыз. Аннан соң тигезләмәләрне кушабыз. Кушканда нуль килеп чыксын өчен тигезләмәләрнең берсен тискәре санга тапкырларга кирәк. Шуңа күрә, беренче тигезләмәне -3 кә, икенчесен 2 гә тапкырлыйбыз.

$$\begin{cases}2x+3y=7, & \mid\ (-3)\\ 3x+4y=11. & \mid\ \ 2\end{cases} \qquad \begin{cases}-6x-9y=-21,\\ 6x+8y=22.\end{cases}$$

$$-6x+6x-9y+8y=-21+22$$

$$-y=1,$$
$$y=-1.$$

Системаның кайсы да булса бер тигезләмәсенә y урынына (-1) не куябыз һәм x ны табабыз:

$$2x+3y=7,$$
$$2x+3(-1)=7,$$
$$2x-3=7,$$
$$2x=7+3,$$
$$x=5.$$

Җавап: $x=5$, $y=-1$.

Кагыйдә. Тигезләмәләр системасын кушу юлы белән чишү өчен түбәндәгеләрне эшләргә кирәк:

1. *Ике тигезләмәне дә үзгәрешлеләрнең берсе алдындагы коэффициентлар модульләре буенча тигез, тамгалары буенча капма-каршы булырлык итеп, билгеле бер саннарга тапкырларга.*

2. *Тигезләмәләрне кушарга һәм билгесезләрнең берсен табарга.*

3. *Табылган санны тигезләмәләрнең берсенә, билгесез урынына куярга һәм икенче билгесезне табарга.*

4. *Җавапны язарга.*

Мисал. Ике санның суммасы 53 кә, ә аларның аермасы 3 кә тигез. Бу саннарны табарга.

Чишү. Беренче санны x, икенчесен y дип билгелик. Суммалары 53 булганлыктан, беренче тигезләмә $x+y=53$ булыр.

Саннарның аермасы 3 кә тигез, икенче тигезләмә $x-y=3$ була. Саннар бер үк булганлыктан, тигезләмәләр системасын төзибез:

$$\begin{cases}x+y=53,\\ x-y=3.\end{cases}$$

Бу системаны алыштырып кую юлы белән чишәбез. Беренче тигезләмәдән x ны табабыз. $x=53-y$ һәм аны икенче тигезләмәгә, x урынына куябыз:

$$x-y=3,$$
$$53-y-y=3,$$
$$-y-y=3-53,$$
$$-2y=-50,$$
$$y=25.$$

x ның кыйммәтен табабыз.

$$x=53-y,$$
$$x=53-25,$$
$$x=28.$$

Җавап: 28 һәм 25.

Мисал. 2 кг алма һәм 4 кг груша өчен 260 сум, ә 5 кг алма һәм 3 кг груша өчен 300 сум түләделәр. Бер килограмм алма һәм бер килограмм груша күпме тора?

Чишү. 1 кг алманың бәясен x сум, ә 1 кг грушаның бәясен y сум дип билгелик. 2 кг алма $2x$ сум, 4 кг груша $4y$ сум торыр. Беренче тигезләмә $2x + 4y = 260$ була. 5 кг алма $5x$ сум, 3 кг груша $3y$ сум тора. Икенче тигезләмәне төзибез:

$$5x + 3y = 300.$$

Тигезләмәләр системасын кушу юлы белән чишәбез. Беренче тигезләмәне 5 кә, икенчесен (-2) гә тапкырлыйбыз.

$$\begin{cases} 2x + 4y = 260, \\ 5x + 3y = 300; \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 5 \\ (-2) \end{vmatrix} \quad \begin{cases} 10x + 20y = 1300, \\ -10x - 6y = -600; \end{cases}$$

$$10x - 10x + 20y - 6y = 1300 - 600,$$
$$14y = 700,$$
$$y = 700 : 14,$$
$$y = 50.$$

50 санын тигезләмәләрнең берәрсенә куябыз.

$$2x + 4y = 260,$$
$$2x + 4 \cdot 50 = 260,$$
$$2x = 260 - 200,$$
$$x = 30.$$

Җавап: 30 сум һәм 50 сум.

16 нчы зачет

1. Нәрсә ул тигезләмәләр системасы?
2. Тигезләмәләр системасын чишү дип нәрсәгә әйтәләр?
3. Тигезләмәләр системасын алыштырып кую юлы белән чишү кагыйдәсе.
4. Тигезләмәләр системасын кушу юлы белән чишү кагыйдәсе.

16 нчы контроль эш

1. Тигезләмәләр системасын чишәргә:

а) $\begin{cases} 3x - 3y = 25, \\ x - 2y = 8. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + 3y = 18, \\ 4x - 5y = 14. \end{cases}$

2. Ике туп һәм сетка 310 сум, өч туп һәм ике сетка 540 сум тора. Бер туп һәм бер сетка күпме тора?

8 сыйныф

§ 17. АЛГЕБРАИК ВАКЛАНМАЛАРНЫ КУШУ ҺӘМ АЛУ

Җиденче класста без алгебраик аңлатмаларны рәвешүзгәртергә өйрәндек. Билгеләмәне искә төшерик әле:

Билгеләмә. Саннарны һәм үзгәрешлеләрне гамәл билгеләре һәм җәяләр белән тоташтырып төзелгән язылыш **алгебраик аңлатма** дип атала.

Аңлатмалар бөтен һәм вакланмалы булырга мөмкин.

Бөтен аңлатмалар: a, $3x$, $x + 2y$, $\frac{1}{2}x$, $\frac{x+y}{3}$.

Вакланмалы аңлатмалар: $\frac{1}{a}$, $\frac{x+y}{b}$, $\frac{4c-3}{3a-1}$.

Үзгәрешлеле аңлатмага бүлүне эченә алган аңлатмалар вакланмалы аңлатмалар булалар.

Кагыйдә. *Вакланманы кыскарту өчен аның санаучысын да, ваклаучысын да бер үк санга яки аңлатмага бүләргә кирәк.*

Вакланманың төп үзлеге буенча аның кыйммәте үзгәрми.

Мисал. Кыскартырга: $\frac{15}{55} = \frac{15:5}{55:5} = \frac{3}{11}$, $\frac{20}{60} = \frac{20:20}{60:20} = \frac{1}{3}$,

$\frac{64}{128} = \frac{64:8}{128:8} = \frac{8}{16} = \frac{8:8}{16:8} = \frac{1}{2}$; $\frac{60}{20} = \frac{60:20}{20:20} = \frac{3}{1} = 3$; $\frac{a^5}{a^7} = \frac{a^5:a^5}{a^7:a^5} = \frac{1}{a^2}$,

$\frac{c^7}{c^5} = \frac{c^7:c^5}{c^5:c^5} = \frac{c^2}{1} = c^2$, $\frac{4a^2b^3}{6ab^3} = \frac{2a}{3}$, чөнки $\frac{4}{6} = \frac{4:2}{6:2} = \frac{2}{3}$, $\frac{a^2}{a} = \frac{a^2:a}{a:a} = \frac{a}{1}$,

$\frac{b^3}{b^3} = \frac{b^3:b^3}{b^3:b^3} = \frac{1}{1} = 1$, $\frac{6(x-5)}{7(x-5)^2} = \frac{6(x-5):(x-5)}{7(x-5)^2:(x-5)} = \frac{6}{7(x-5)}$.

Тапкырлаучыларны гына кыскартырга мөмкин!

Мәсәлән, $\frac{x^3+5}{x^4+4}$ һәм $\frac{a+10}{a+8}$ вакланмаларын кыскартырга ярамый.

Кыскарту ул — **тулаем** санаучыны һәм **тулаем** ваклаучыны бер үк санга яки аңлатмага бүлү дигән сүз.

Кушылучыларны кыскартырга ярамый!

Мисал. Кыскартырга: $\frac{2x-2y}{3x-3y}$.

Чишү. Кушылучыларны кыскартырга ярамый, шуның өчен санаучыны да, ваклаучыны да тапкырлаучыларга таркатабыз. Санаучы-

дагы уртак тапкырлаучы булган 2 не һәм ваклаучыдагы 3 не җәя тышына чыгарып, табабыз: $\frac{2x-2y}{3x-3y}=\frac{2\cdot(x-y)}{3\cdot(x-y)}=\frac{2}{3}$, $(x-y)$ җәясенә кыскарттык.

Мисал. $\frac{3a^3b^2+3a^2b^2}{6a^2b^2-6ab^3}$ ваклапмасын кыскартырга.

Чишү. Санаучыда $3a^2b^2$, ваклаучыда $6ab^2$ уртак тапкырлаучыларын җәяләр тышына чыгарыйк. $\frac{3a^3b^2+3a^2b^2}{6a^2b^2-6ab^3}=\frac{3a^2b^2\cdot(a+1)}{6ab^2\cdot(a-b)}=\frac{a\cdot(a+1)}{2\cdot(a-b)}$,

чөнки $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\frac{a^2}{a}=\frac{a}{1}$, $\frac{b^2}{b^2}=\frac{1}{1}=1$.

Җәяләр тышына уртак тапкырлаучыны чыгарып булмаганда, аңлатманы кыскача тапкырлау формулалары буенча таркатып карарга кирәк. Аларны искә төшерик:

$\Delta^2-\square^2=(\Delta-\square)(\Delta+\square)$ — квадратлар аермасы,
$\Delta^2-2\Delta\cdot\square+\square^2=(\Delta-\square)^2$ — аерманың квадраты,
$\Delta^2+2\cdot\Delta\cdot\square+\square^2=(\Delta+\square)^2$ — сумманың квадраты.

Мисал. Ваклапмаларны кыскартырга:

$$\frac{7x-7y}{x^2-y^2}=\frac{7\cdot(x-y)}{(x-y)(x+y)}=\frac{7}{x+y}.$$

$$\frac{4x^2-28x+49}{4x^2-49}=\frac{(2x-7)^2}{4x^2-49}=\frac{(2x-7)\cdot(2x-7)}{(2x-7)\cdot(2x+7)}=\frac{2x-7}{2x+7}.$$

Мисал. $x=18$ булганда $\frac{9x^2-1}{9x^2+6x+1}$ аңлатмасының кыйммәтен табарга.

Чишү. Санаучыны квадратлар аермасы формуласы, ә ваклаучыны сумманың квадраты формуласы буенча тапкырлаучыларга таркатыйк.

$$\frac{9x^2-1}{9x^2+6x+1}=\frac{(3x-1)(3x+1)}{(3x+1)^2}=\frac{(3x-1)(3x+1)}{(3x+1)(3x+1)}=\frac{3x-1}{3x+1}=\frac{3\cdot18-1}{3\cdot18+1}=\frac{54-1}{54+1}=\frac{53}{55}.$$

Мисал. Ваклапмаларны кыскартырга:

$\frac{ax+ay}{by+bx}=\frac{a\cdot(x+y)}{b\cdot(y+x)}=\frac{a}{b}$, чөнки $x+y=y+x$ — кушылучыларның урынын алыштырудан сумма үзгәрми; $\frac{cx-cy}{py-px}=\frac{c\cdot(x-y)}{p\cdot(y-x)}=-\frac{c\cdot(x-y)}{p\cdot(x-y)}=-\frac{c}{p}$,

чөнки $(x-y)$ һәм $(y-x)$ аңлатмалары бер үк аңлатма түгел, берберсенә ошаганнар гына. Аларның кайсы да булса берсенең җәяләре тышына -1 не чыгарып, бер үк төрле аңлатмалар алырга була.

Кагыйдә. *Әгәр вакланманың санаучысында һәм ваклаучысында охшаш тапкырлаучылар булса, вакланма алдындагы тамганы үзгәртеп, аларны кыскартырга мөмкин.*

Мисал. Вакланманы кыскартырга:

$$\frac{a-2}{2-a}=-\frac{a-2}{a-2}=-1.$$

Ваклаучылары тигез булган вакланмаларны кушу һәм алу

Кагыйдә. Ваклаучылары тигез булган вакланмаларны кушу яки алу өчен:

1) *ваклаучыны үзгәрешсез калдырып, санаучыларын кушарга яки алырга,*

2) *мөмкин булганда вакланманы кыскартырга кирәк.*

Мисаллар.

$$\frac{4}{9}-\frac{1}{9}=\frac{4-1}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3};\quad \frac{5}{11}+\frac{2}{11}=\frac{5+2}{11}=\frac{7}{11},$$

$$\frac{a}{3}+\frac{5a}{3}=\frac{a+5a}{3}=\frac{6a}{3}=\frac{2a}{1}=2a,$$

$$\frac{5x}{7}-\frac{4x}{7}=\frac{5x-4x}{7}=\frac{x}{7},\quad \frac{3}{a}+\frac{5}{a}=\frac{3+5}{a}=\frac{8}{a},\quad \frac{7}{b}-\frac{2}{b}=\frac{7-2}{b}=\frac{5}{b},$$

$$\frac{x}{y}-\frac{a}{y}=\frac{x-a}{y},$$

$$\frac{c}{p}+\frac{b}{p}=\frac{c+b}{p},\quad \frac{a+b}{4}-\frac{b+c}{4}=\frac{(a+b)-(b+c)}{4}=\frac{a+b-b-c}{4}=\frac{a-c}{4}.$$

Җәяләр алдында "минус" тамгасы булса, җәяләрне ачканда җәя эчендәге барлык тамгалар да үзгәрә.

$$\frac{3}{a+b}+\frac{1}{a+b}=\frac{3+1}{a+b}=\frac{4}{a+b}.$$

$$\frac{a+b}{x+y}-\frac{2b-a}{x+y}=\frac{(a+b)-(2b-a)}{x+y}=\frac{a+b-2b+a}{x+y}=\frac{2a-b}{x+y}.$$

$\frac{3}{x+y}-\frac{a}{y+x}=\frac{3-a}{x+y}=\frac{3-a}{y+x}$, чөнки $x+y=y+x$.

Әгәр ваклаучылар охшаш булсалар, вакланма алдындагы тамганы үзгәртергә кирәк.

$\frac{5}{x-y}+\frac{2}{y-x}=\frac{5}{x-y}-\frac{2}{x-y}=$ ваклаучыларны тигезләдек, $\frac{5-2}{x-y}=\frac{3}{x-y}$.

Ваклаучылары төрле булган вакланмаларны кушу һәм алу

Мисал. $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}$ гамәлен эшләргә.

Чишу. 4 һәм 6 саннары өчен иң кечкенә уртак ваклаучыны эзлибез. 12 санын таптык.

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{4}=\frac{\quad}{12}$$

Һәр кушылучыга өстәмә тапкырлаучыларны табабыз. Болар: $12:6=2$ һәм $12:4=3$ саннары.

$\frac{^{2/}5}{6}+\frac{^{3/}3}{4}=\frac{\quad}{12}$. Аларны санаучыларга тапкырлыйбыз.

$$\frac{^{2/}5}{6}+\frac{^{3/}3}{4}=\frac{10+9}{12}=\frac{19}{12}.$$

Кагыйдә. Гади вакланмаларны кушу һәм алу өчен түбәндәгеләрне үтәргә кирәк:

1. *Иң кечкенә уртак ваклаучыны табарга.*
2. *Һәр вакланма өчен өстәмә тапкырлаучыларны табарга.*
3. *Аларны санаучыларга тапкырларга.*
4. *Санаучыда гамәлләрне эшләргә.*
5. *Мөмкин булганда, җавапны кыскартырга.*

Мисал. $\frac{7}{8}-\frac{5}{12}$ гамәлен эшләргә.

Чишү. 8 һәм 12 саннарының иң кечкенә уртак ваклаучылары 24 кә тигез. $24:8=3$ һәм $24:12=2$.

$$\frac{^{3/}7}{8}-\frac{^{2/}5}{12}=\frac{21-10}{24}=\frac{11}{24}.$$

Алгебраик вакланмаларны кушу һәм алу да шушы ук кагыйдә буенча эшләнә.

Мисаллар. $\frac{^{2/}a}{3}+\frac{^{1/}b}{6}=\frac{2a+b}{6}$, $\frac{^{y/}a}{b}+\frac{^{b/}x}{y}=\frac{ay+bx}{by}$, $\frac{^{x^2/}1}{x}+\frac{1}{x^3}=\frac{x^2+1}{x^3}$,

$^{a/}2+\frac{^{1/}1}{a}=\frac{2a+1}{a}$, $\frac{^{1/}x}{y}-{}^{y/}p=\frac{x-py}{y}$.

Иң кечкенә уртак ваклаучыны телдән генә табу кыен булганда, кагыйдә буенча табарга кирәк.

Кагыйдә. Иң кечкенә уртак ваклаучыны табу өчен түбәндәгеләрне эшләргә кирәк:

1. *Барлык ваклаучыларны тапкырлаучыларга таркатырга.*
2. *Бер ваклаучының барлык тапкырлаучыларын язып алырга.*
3. *Башка ваклаучыларның җитмәгән тапкырлаучыларын өстәргә.*
4. *Аларны тапкырларга.*

Мисал. Гамәлне эшләргә: $\frac{7}{54}+\frac{1}{48}$.

Чишү. 1. Ваклаучыларны тапкырлаучыларга таркатабыз:

$$\begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

2. Беренче ваклаучының барлык тапкырлаучыларын язып куябыз: $2\cdot3\cdot3\cdot3$.

3. Икенче ваклаучыда нинди тапкырлаучыларның булуын тикшерәбез. Анда дүрт икеле һәм бер өчле бар. Өчле беренче ваклаучыда бар. Беренче ваклаучыда бер икеле бар, димәк, өч икеле җитми. Аларны өстәп язабыз:

$2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot/2\cdot2\cdot2/=54\cdot8=432$. Ваклаучы 432 гә тигез.

$432:54=8$ һәм $432:48=9$

$$\frac{^{8/}7}{54}+\frac{^{9/}1}{48}=\frac{56+9}{432}=\frac{65}{432}.$$

Мисаллар. Гамәлләрне эшләргә: $\frac{x}{16a^2b}-\frac{y}{24ab^3}$

Уртак ваклаучыны эзлибез:
$2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot(3)=16\cdot3=48$
a^2 һәм a өчен — a^2
b һәм b^3 өчен — b^3
Ваклаучы: $48a^2b^3$.

$$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Өстәмә тапкырлаучыларны эзлибез:

$$48a^2b^3:16a^2b=3b^2,\quad 48a^2b^3:24ab^3=2a$$

$$\frac{^{3b^2/}x}{16a^2b}-\frac{^{2a/}y}{24ab^3}=\frac{3b^2x-2ay}{48a^2b^3}.$$

$$\frac{^{b+c/}1}{a+b}-\frac{^{a+b/}1}{b+c}=\frac{(b+c)-(a+b)}{(a+b)\cdot(b+c)}=\frac{b+c-a-b}{(a+b)\cdot(b+c)}=\frac{c-a}{(a+b)\cdot(b+c)};$$

$$\frac{^{b(a+b)/}1}{a}+\frac{^{a(a+b)/}1}{b}+\frac{^{ab/}1}{a+b}=\frac{ba+b^2+a^2+ab+ab}{ab\cdot(a+b)}=\frac{a^2+3ab+b^2}{ab\cdot(a+b)},$$

$$^{x+y}/x+\frac{^{1/}y}{x+y}=\frac{x^2+xy+y}{x+y},$$

$$\frac{a}{ab+b^2}-\frac{b}{a^2+ab}=\frac{^{a/}a}{b(a+b)}-\frac{^{b/}b}{a(a+b)}=\frac{a^2-b^2}{ab(a+b)}=\frac{a-b}{ab}$$

$$\frac{2xy}{x^2-y^2}-\frac{x}{x+y}=\frac{^{1/}2xy}{(x-y)\cdot(x+y)}-\frac{^{x-y/}x}{x+y}=\frac{2xy-(x-xy)}{(x-y)\cdot(x+y)}=\frac{2xy-x^2+xy}{x^2-y^2}=$$

$$=\frac{-x^2+3xy}{x^2-y^2}.$$

$$\frac{^{1/}2a-5x}{9}-\frac{^{3/}3a-7x}{3}=\frac{(2a-5x)-(9a-21x)}{9}=\frac{2a-5x-9a+21x}{9}=\frac{-7a+16x}{9}.$$

$$\frac{^{a^2/}1}{a}+\frac{^{a/}1}{a^2}+\frac{1}{a^3}=\frac{a^2+a+1}{a^3}.$$

$$\frac{^{x-1/}x-1}{x+1}-\frac{^{x+1/}x+1}{x-1}=\frac{\left(x^2-x-x+1\right)-\left(x^2+x+x+1\right)}{(x+1)\cdot(x-1)}=$$

$$=\frac{x^2-x-x+1-x^2-x-x-1}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{-4x}{x^2-1},$$

$$\frac{4x-1}{5x-10y}+\frac{3x+1}{10x-20y}=\frac{^{2/}4x-1}{5\cdot(x-2y)}+\frac{^{1/}3x+1}{10\cdot(x-2y)}=\frac{8x-2+3x+1}{10\cdot(x-2y)}=\frac{11x-1}{10(x-2y)};$$

$$\frac{3}{a^2-ab}+\frac{1}{b^2-ab}=\frac{3}{a\cdot(a-b)}+\frac{1}{b\cdot(b-a)}=\frac{^{b/}3}{a\cdot(a-b)}-\frac{^{a/}1}{b(a-b)}=\frac{3b-a}{ab(a-b)},$$

$$\frac{2}{a^2-4}-\frac{3}{a^2-2a}=\frac{^{a/}2}{(a+2)\cdot(a-2)}-\frac{^{a+2/}3}{a\cdot(a-2)}=$$

$$=\frac{2a-(3a+6)}{a\cdot(a+2)\cdot(a-2)}=\frac{2a-3a-6}{a\left(a^2-4\right)}=\frac{-a-6}{a\left(a^2-4\right)},$$

$$\frac{^{a-b/}a}{a+b}+\frac{^{a+b/}b}{a-b}-\frac{^{1/}2b^2}{a^2-b^2}=\frac{a^2-ab+ab+b^2-2b^2}{a^2-b^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2-b^2}=1.$$

$$\frac{1}{4x^2+12xy+9y^2}-\frac{2}{2x^2+3xy}=\frac{^{x/}1}{(2x+3y)^2}-\frac{^{2x+3y/}2}{x(2x+3y)}=$$

$$=\frac{x-(4x+6y)}{x(2x+3y)^2}=\frac{x-4x-6y}{x\cdot(2x+3y)^2}=\frac{-3x-6y}{x\cdot(2x+3y)^2}.$$

17 нче зачет

1. Вакланманы ничек кыскартырга? Кагыйдә.
2. Охшаш тапкырлаучыларны ничек кыскартырга?
3. Ваклаучылары бертөрле булган вакланмаларны кушу һәм алу кагыйдәсе.
4. Ваклаучылары төрле булган вакланмаларны кушу һәм алу кагыйдәсе.
5. Иң кечкенә уртак ваклаучыны табу кагыйдәсе.

17 нче контроль эш

1. Вакланмаларны кыскартыгыз:

$$\frac{12a^4b^3}{16a^2b^3},\quad \frac{a^2-ab}{a^3-a^2b},\quad \frac{4a^2-1}{4a^2-4a+1},\quad \frac{xy-xp}{x^2-p^2}$$

2. Гамәлләрне эшләгез:

$$a+\frac{7}{x},\quad \frac{y}{x}-\frac{y+1}{x+1},\quad \frac{a}{a^2-9}-\frac{3}{a-3},\quad \frac{7y-2}{5y-4}+\frac{3y-3}{4-5y}.$$

§ 18. ВАКЛАНМАЛАРНЫ ТАПКЫРЛАУ ҺӘМ БҮЛҮ

Кагыйдә. *Вакланманы вакланмага тапкырлау өчен, санаучыны санаучыга, ваклаучыны ваклаучыга тапкырларга һәм мөмкин булганда кыскартырга кирәк.*

Мисаллар. $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{^1\not{3}\cdot 5}{4\cdot\not{6}_2}=\frac{5}{8}$, $\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{x}=\frac{ab}{cx}$, $3\cdot\frac{5}{6}=\frac{3}{1}\cdot\frac{5}{6}=\frac{^1\not{3}\cdot 5}{1\cdot\not{6}_2}=\frac{5}{2}$,

$c\cdot\frac{x}{y}=\frac{c}{1}\cdot\frac{x}{y}=\frac{cx}{y}$, $\frac{a^2}{b}\cdot\frac{b^3}{a^3}=\frac{a^2\cdot b^3}{b\cdot a^3}=\frac{b^2}{a}$, бу очракта $\frac{a^2}{a^3}=\frac{1}{a}$ һәм $\frac{b^3}{b}=\frac{b^2}{1}$ кыскартуларын эшләдек.

$\frac{4ab^2}{5cx^3}\cdot\frac{10a^2b}{c^3x}=\frac{4ab^2\cdot 10a^2b}{5cx^3\cdot c^3x}=\frac{8a^3b^3}{c^4x^4}$, $\frac{10}{5}=\frac{2}{1}$ дип кыскарттык.

$\frac{a+b}{c}\cdot\frac{c^2}{a}=\frac{(a+b)\cdot c^2}{c\cdot a}=\frac{(a+b)c}{a}=\frac{ac+bc}{a}$, $\frac{c^2}{c}=\frac{c}{1}$ дип кыскарттык.

$$\frac{a+b}{x}\cdot\frac{2a+b}{x+y}=\frac{(a+b)(2a+b)}{x\cdot(x+y)}=\frac{2a^2+ab+2ab+b^2}{x\cdot(x+y)}=\frac{2a^2+3ab+b^2}{x\cdot(x+y)},$$

$$\frac{x+2y}{x^2-y^2}\cdot\frac{x+y}{x^2-4y^2}=\frac{(x+2y)(x+y)}{(x+y)\cdot(x-y)\cdot(x-2y)(x+2y)}=\frac{1}{(x-y)\cdot(x-2y)}.$$

Бу мисалда ваклаучыларны тапкырлаучыларга таркаттык һәм $(x+y)$, $(x+2y)$ җәяләренә кыскарттык.

$$\frac{9a^2+12ab+4b^2}{a}\cdot\frac{5a^2b}{3a+2b}=\frac{(3a+2b)^2\cdot 5a^2b}{a\cdot(3a+2b)}=\frac{5ab(3a+2b)}{1}=5ab(3a+2b)$$

Түбәндәгечә кыскарттык:

$$\frac{9a^2+12ab+4b^2}{3a+2b}=\frac{(3a+2b)^2}{3a+b}=\frac{3a+2b}{1}\ \text{һәм}\ \frac{a^2}{a}=\frac{a}{1}.$$

$$\frac{a-b}{a}\cdot\frac{2ab}{b^2-a^2}=\frac{(a-b)\cdot 2ab}{a\left(b^2-a^2\right)}=\frac{(a-b)\cdot 2ab}{a\cdot(b-a)\cdot(b+a)}=$$

Охшаш $(a-b)$ һәм $(b-a)$ җәяләрен бертөрле итү өчен вакланма алдындагы тамганы үзгәртергә кирәк.

$$= -\frac{(a-b)2ab}{a(a-b)\cdot(a+b)} = -\frac{2b}{a+b}.$$

Вакланманы дәрәҗәгә күтәрү

Кагыйдә. *Вакланманы дәрәҗәгә күтәрү өчен санаучыны да, ваклаучыны да шул ук дәрәҗәгә күтәрергә кирәк.*

Мисаллар.

$$\left(\frac{4a^2b}{3cx^3}\right)^2 = \frac{(4a^2b)^2}{(3cx^3)^2} = \frac{4a^2b\cdot 4a^2b}{3cx^3\cdot 3cx^3} = \frac{16a^4b^2}{9c^2x^6}.$$

$$\left(\frac{2xy^5}{3c^2p}\right)^3 = \frac{(2xy^5)^3}{(3c^2p)^3} = \frac{2xy^5\cdot 2xy^5\cdot 2xy^5}{3c^2p\cdot 3c^2p\cdot 3c^2p} = \frac{8x^3y^{15}}{27c^6p^3}.$$

$$\left(\frac{a-b}{x}\right)^4 = \frac{(a-b)^4}{x^8}$$

Вакланмаларны бүлү

Кагыйдә. *Вакланманы вакланмага бүлү өчен беренче вакланманы икенчесенә кире булган вакланмага тапкырларга кирәк.*

Мисаллар. $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4} = \frac{2\cdot 5}{3\cdot 4} = \frac{5}{6}$, $\frac{a}{x} : \frac{b}{y} = \frac{a}{x}\cdot\frac{y}{b} = \frac{ay}{xb}$,

$$3 : \frac{2}{5} = \frac{3}{1}\cdot\frac{5}{2} = \frac{15}{2}, \quad \frac{2}{5} : 3 = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{15},$$

$$x : \frac{a}{c} = \frac{x}{1}\cdot\frac{c}{a} = \frac{xc}{a}, \quad \frac{c}{y} : b = \frac{c}{y}\cdot\frac{1}{b} = \frac{c}{by}.$$

$$\frac{2a^2b^3}{3x^2y^2} : \frac{8ab^3}{5xy^3} = \frac{2a^2b^3}{3x^2y^2}\cdot\frac{5xy^3}{8ab^3} = \frac{1a^2b^3\cdot 5xy^3}{3x^2y^2\cdot 4ab^3} = \frac{5ay}{12x}.$$

Кыскартулар:

$$\frac{a^2}{a} = \frac{a}{1}, \quad \frac{b^3}{b^3} = 1, \quad \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}, \quad \frac{y^3}{y^2} = \frac{y}{1}, \quad \frac{2}{8} = \frac{1}{4},$$

$$\frac{7x-7y}{2x+2y} : \frac{14x-14y}{x+y} = \frac{7(x-y)}{2(x+y)}\cdot\frac{x+y}{14x-14y} = \frac{7\cdot(x-y)(x+y)}{2\cdot(x+y)\cdot 14(x-y)} = \frac{1}{4},$$

$(x-y)$ һәм $(x+y)$ җәяләренә һәм $\frac{7}{14}$ вакланмасын кыскарттык.

$$\frac{x^2-1}{x^2} : \frac{x-1}{x} = \frac{x^2-1}{x^2}\cdot\frac{x}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)\cdot x}{x^2(x-1)} = \frac{x+1}{x},$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{3a-3b} : \frac{a^2-b^2}{6a-6b} = \frac{a^2+2ab+b^2}{3a-3b} \cdot \frac{6a-6b}{a^2-b^2} =$$

$$= \frac{(a+b)^2 \cdot 6 \cdot (a-b)}{3 \cdot (a-b) \cdot (a+b) \cdot (a-b)} = \frac{2 \cdot (a+b)}{a-b},$$

$$\frac{5}{x-y} : \frac{6}{y-x} = \frac{5}{x-y} \cdot \frac{y-x}{6} = \frac{5 \cdot (y-x)}{6 \cdot (x-y)} = -\frac{5(x-y)}{6 \cdot (x-y)} = -\frac{5}{6},$$

$$\frac{xy^3}{5-5p} : \frac{x^2y^3}{1-2p+p^2} = \frac{xy^3}{5-5p} \cdot \frac{1-2p+p^2}{x^2y^3} = \frac{xy^3(1-p)^2}{5(1-p)^2 \cdot x^2y^3} = \frac{1-p}{5x},$$

$\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$, $\frac{(1-p)^2}{(1-p)} = \frac{1-p}{1}$, $\frac{y^3}{y^3} = 1$ кыскартуларын эшләдек.

Әгәр мисалда рәттән берничә тапкырлау яки бүлү булса, барлык гамәлләрне берьюлы эшләргә кирәк:

Мисаллар. $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} : \frac{6}{7} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cancel{4}^1}{3 \cdot 3 \cdot \cancel{6}_3 \cancel{6}_3} = \frac{70}{81}$,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{p} : \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{p} \cdot \frac{y}{x} = \frac{acy}{bpx},$$

$$\frac{12a^4}{15b^2} \cdot \frac{5b^3}{2a} : \frac{15a}{2b} = \frac{12a^4}{15b^2} \cdot \frac{5b^3}{2a} \cdot \frac{2b}{15a} = \frac{12a^4 \cdot 5b^3 \cdot 2b}{15b^2 \cdot 2a \cdot 15a} = \frac{4a^2b}{15}.$$

Кыскартулар:

$$\frac{12 \cdot 5 \cdot \cancel{2}^1}{15 \cdot \cancel{2}^1 \cdot 15} = \frac{12 \cdot \cancel{5}^1}{{}_3\cancel{15} \cdot 15} = \frac{\cancel{12}^4}{{}_1\cancel{3} \cdot 15} = \frac{4}{15},$$

$$\frac{a^4}{a \cdot a} = \frac{a^4}{a^2} = \frac{a^2}{1} \text{ һәм } \frac{b^3 \cdot b}{b^2} = \frac{b^3}{b^3} = \frac{b}{1}.$$

$$\frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{x^2-2xy+y^2}{x^2+2xy+y^2} : \frac{x}{x+y} = \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{(x-y)^2}{(x+y)^2} \cdot \frac{x+y}{x} = \frac{(x+y)(x-y)^2(x+y)}{(x-y) \cdot (x+y)^2 \cdot x} = \frac{x-y}{x}.$$

Кыскартулар:

$$\frac{(x+y)(x+y)}{(x+y)^2} = \frac{(x+y)^2}{(x+y)^2} = 1 \text{ һәм } \frac{(x-y)^2}{x-y} = \frac{x-y}{1}.$$

18 нче зачет

1. Вакланмаларны тапкырлау кагыйдәсе.
2. Вакланманы дәрәҗәгә күтәрү кагыйдәсе.
3. Вакланмаларны бүлү кагыйдәсе.

18 нче контроль эш

Гамәлләрне эшләгез:

а) $\frac{3x^2y}{20ab^3} \cdot \frac{15a^2b^2}{7xy^3}$

б) $\frac{2a}{a^2-b^2} \cdot \frac{a+b}{4a^2}$

в) $\frac{x^2+2xy+y^2}{2a-2b} : \frac{x+y}{a-b}$

г) $\frac{b^2-3b}{3} : \frac{b-3}{b}$

д) $\frac{3}{4} : \frac{x}{y} \cdot \frac{a+b}{c}$

е) $\frac{3x^2}{x-1} \cdot (x-1)^2$.

§ 19. БЕРДӘЙ РӘВЕШҮЗГӘРТҮЛӘР

Вакланмалар белән барлык гамәлләргә мисаллар чишү өчен гомуми кагыйдә юк. Гамәлләрне эшләү тәртибе санлы мисалларны эшләү тәртибе кебек үк.

Гамәлләр тәртибе:

1. Әгәр мисал эчендә җәяләр булса, башта җәяләр эчендәге барлык гамәлләр башкарыла.
2. Башта тапкырлау һәм бүлү, ә аннан соң кушу һәм алу башкарыла.

Мисал. $\left(x^2 - \frac{1+x^4}{x^2+1}\right) : \frac{1-x}{1+x^2} = -(x+1)$

Чишү. 1. ${}^{x^2+1/}x^2 - \frac{1+x^4}{x^2+1} = \frac{x^4+x^2-(1+x^4)}{x^2+1} = \frac{x^4+x^2-1-x^4}{x^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

2. $\frac{x^2-1}{x^2+1} : \frac{1-x}{1+x^2} = \frac{(x^2-1)\cdot(1+x^2)}{(x^2+1)\cdot(1-x)} = \frac{x^2-1}{1-x} = -\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = -(x+1).$

Бу мисалның икенче эшендә без вакланманы $(1+x)$ ка кыскарттык һәм, $(x-1)$ белән $(1-x)$ җәяләрен бертөрле итәр өчен, вакланма алдындагы билгене үзгәрттек.

Мисал. $\frac{5x+6}{x^2-4} - \frac{x}{x^2-4} : \frac{x}{x-2} - \frac{x+2}{x-2} = -1.$

Чишү.

1. $\frac{x}{x^2-4} : \frac{x}{x-2} = \frac{x(x-2)}{(x^2-4)x} = \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2}$

2. $\frac{5x+6}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} - \frac{x+2}{x-2} = \frac{{}^{1/}5x+6}{(x-2)(x+2)} - \frac{{}^{x-2/}1}{x+2} - \frac{{}^{x+2/}x+2}{x-2} =$

$$= \frac{5x+6-(x-2)-\left(x^2+2x+2x+4\right)}{(x-2)(x+2)} =$$

$$= \frac{5x+6-x+2-x^2-2x-2x-4}{(x-2)(x+2)} = \frac{4-x^2}{(x-2)(x+2)} = \frac{(2-x)(2+x)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2-x}{x-2} = -1.$$

Мисал. $\left(\frac{5}{25-b^2} - \frac{-1}{10+2b} + \frac{1}{10-2b}\right)\cdot\left(25-10b+b^2\right) = 5-b.$

Чишү.

1. $\frac{5}{25-b^2} + \frac{-1}{10+2b} + \frac{1}{10-2b} = \frac{^{2/}5}{(5-b)(5+b)} + \frac{^{5-b/}-1}{2(5+b)} +$

$$+\frac{^{5+b/}1}{2(5-b)} = \frac{10-5+b+5+b}{2(5+b)(5-b)} = \frac{2b+10}{2(5+b)(5-b)} = \frac{2(b+5)}{2(5+b)(5-b)} = \frac{1}{5-b}.$$

2. $\frac{1}{5-b}\cdot\left(25-10b+b^2\right) = \frac{1\cdot(5-b)^2}{5-b} = \frac{(5-b)(5-b)}{5-b} = 5-b.$

Мисал. $\frac{1}{a-2} - \frac{a}{a^2-4}\cdot\left(\frac{1}{a^2-a} - \frac{1}{a-1}\right) = \frac{a+3}{a^2-4}$

Чишү.

1. $\frac{1}{a^2-a} - \frac{1}{a-1} = \frac{^{1/}1}{a(a-1)} - \frac{^{a/}1}{a-1} = \frac{1-a}{a(a-1)} = -\frac{1}{a}$

$(1-a)$ һәм $(a-1)$ җәяләрен вакланма алдындагы тамганы үзгәртеп кыскартабыз.

2. $\frac{a}{a^2-4}\cdot\left(-\frac{1}{a}\right) = -\frac{a\cdot 1}{\left(a^2-4\right)\cdot a} = -\frac{1}{a^2-4}$

3. $\frac{1}{a-2} - \left(-\frac{1}{a^2-4}\right) = \frac{^{a+2/}1}{a-2} + \frac{1}{a^2-4} = \frac{a+2+1}{a^2-4} = \frac{a+3}{a^2-4}$

Мисал. $\left(a+1+\frac{1}{a-1}\right) : \frac{a^2}{1-2a+a^2} = a-1$

Чишү.

1. $^{a-1/}a + 1 + \frac{^{1/}1}{a-1} = \frac{a^2+a-a-1+1}{a-1} = \frac{a^2}{a-1}$

2. $\frac{a^2}{a-1} : \frac{a^2}{1-2a+a^2} = \frac{a^2(1-a)^2}{(a-1)\cdot a^2} = \frac{(1-a)^2}{a-1} = a-1$

$(1-a)^2 = (a-1)^2$ булганлыктан, вакланманы $(a-1)$ гә кыскартабыз, әмма вакланма алдындагы тамганы үзгәртмибез.

Мисал. $\left(\frac{5p}{p+3}-\frac{14p}{p^2+6p+9}\right):\frac{5p+1}{p^2-9}+\frac{3(p-3)}{p+3}=p-3.$

Чишү.

$$1.\ \frac{5p}{p+3}-\frac{14p}{p^2+6p+9}=\frac{^{p+3/}5p}{p+3}-\frac{14p}{(p+3)^2}=\frac{5p^2+15p-14p}{(p+3)^2}=\frac{5p^2+p}{(p+3)^2}.$$

$$2.\ \frac{5p^2+p}{(p+3)^2}:\frac{5p+1}{p^2-9}=\frac{p(5p+1)\cdot(p-3)(p+3)}{(p+3)(p+3)(5p+1)}=\frac{p(p-3)}{(p+3)}.$$

$$3.\ \frac{^{1/}p(p-3)}{p+3}+\frac{^{p/}3(p-3)}{p+3}=\frac{p^2-3p+3p-9}{p+3}=\frac{p^2-9}{p+3}=\frac{(p-3)(p+3)}{p+3}=p-3.$$

Мисал. Аңлатманың кыйммәте үзгәрешленең кыйммәтенә бәйле түгел икәнен исбатлагыз.

$$\left(\frac{2a}{a^2-1}+\frac{a-1}{2a+2}\right)\cdot\frac{2a}{a+1}-\frac{a}{a-1}.$$

Чишү.

$$1.\ \frac{2a}{a^2-1}+\frac{a-1}{2a+2}=\frac{^{2/}2a}{(a-1)(a+1)}+\frac{^{a-1/}a-1}{2\cdot(a+1)}=\frac{4a+a^2-a-a+1}{2\cdot(a-1)(a+1)}=\frac{a^2+2a+1}{2(a-1)(a+1)}=$$

$$=\frac{(a+1)^2}{2\cdot(a-1)(a+1)}=\frac{(a+1)\cdot(a+1)}{2\cdot(a-1)\cdot(a+1)}=\frac{a+1}{2(a-1)}.$$

$$2.\ \frac{a+1}{2(a-1)}\cdot\frac{2a}{a+1}=\frac{(a+1)\cdot 2a}{2(a-1)(a+1)}=\frac{a}{a-1}.$$

3. $\frac{a}{a-1}-\frac{a}{a-1}=0$. Җавапта үзгәрешле булмаганлыктан, аңлатманың кыйммәте үзгәрешленең кыйммәтләренә бәйле түгел.

Мисал. $a=-2{,}5$ булганда $\left(\frac{4a}{4-a^2}-\frac{a-2}{4+2a}\right)\cdot\frac{4}{a+2}-\frac{2a}{2-a}$ аңлатмасының кыйммәтен табарга.

Чишү.

$$1.\ \frac{4a}{4-a^2}-\frac{a-2}{4+2a}=\frac{^{2/}4a}{(2+a)(2-a)}-\frac{^{2-a/}a-2}{2(2+a)}=\frac{8a-(2a-4-a^2+2a)}{2\cdot(2-a)(2+a)}=$$

$$=\frac{8a-2a+4+a^2-2a}{2(2-a)(2+a)}=$$

$$=\frac{a^2+4a+4}{2(2-a)(2+a)}=\frac{(a+2)^2}{2\cdot(2-a)(2+a)}=\frac{(a+2)(a+2)}{2(2-a)(2+a)}=\frac{a+2}{2(2-a)}.$$

2. $\frac{a+2}{2(2-a)} \cdot \frac{4}{a+2} = \frac{(a+2)\cdot 4}{2(2-a)(a+2)} = \frac{2}{2-a}$.

3. $\frac{2}{2-a} - \frac{2a}{2-a} = \frac{2-2a}{2-a} = \frac{2-2\cdot(-2{,}5)}{2-(-2{,}5)} = \frac{2+5}{2+2{,}5} = \frac{7}{4{,}5} = \frac{70}{45} = \frac{14}{9}$.

19 нчы зачет

1. Гамәлләр тәртибе. Кагыйдә.

19 нчы контроль эш

Гамәлләрне эшләгез:

а) $\frac{1}{5b-9} + \frac{2}{4b^2-9} \cdot \frac{3b+3}{2b+9}$

б) $\left(\frac{3x}{x^2-y^2} + \frac{x}{(x-y)^2}\right) \cdot \frac{(x-y)}{2y} + \frac{3x}{x+y}$.

§ 20. КВАДРАТ ТАМЫРЛАР

Математикада һәрбер гамәлнең киресе бар. Кушуның кире гамәле — алу, тапкырлау гамәленең киресе — бүлү. Ә дәрәҗәгә күтәрүнең киресе нинди гамәл булыр?

Мисаллар. $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$, $6^2 = 6 \cdot 6 = 36$, $10^2 = 10 \cdot 10 = 100$.

Ә менә җавапта 49 булсын өчен нинди санны үз-үзенә тапкырларга кирәк? Билгеле, 7 санын, чөнки $7 \cdot 7 = 49$.

7 саны 49 саныннан квадрат тамыр дип атала.

Билгеләмә. Квадраты a га тигез булган сан a саныннан **квадрат тамыр** дип атала.

Квадрат тамыр "$\sqrt{\ }$" тамгасы белән күрсәтелә. "$\sqrt{x}$" язылышы "x саныннан квадрат тамыр" дип укыла.

Мисаллар. $\sqrt{64} = 8$, чөнки $8 \cdot 8 = 64$,

$\sqrt{100} = 10$, чөнки $10 \cdot 10 = 100$,

$\sqrt{0{,}0001} = 0{,}01$, чөнки $0{,}01 \cdot 0{,}01 = 0{,}0001$.

Квадрат тамырны бары тик уңай саннардан һәм нульдән генә алырга мөмкин. Тискәре саннардан квадрат тамыр алырга ярамый.

$\sqrt{-25}$ була алмый, чөнки үз-үзенә тапкырлагач (-25) не бирә торган сан юк.

Чынлап та, җавап уңай сан була алмый, чөнки уңай санны уңай сангa тапкырлагач, уңай сан килеп чыгар иде, ә безнең − 25 саны — тикәре сан. Димәк, җавап та уңай сан түгел. Шулай ук тискәре сан да була алмый, чөнки тискәре санны тискәре санга тапкырлагач, уңай сан килеп чыгарга тиеш. Шулай итеп, җавапта уңай сан да, тискәре сан да була алмагач, җавап бөтенләй юк дигән сүз.

Квадрат тамырларны табу өчен саннарның квадратлары таблицасыннан файдаланалар.

Саннарның квадратлары таблицасы

Дис-тә-ләр	Берәмлекләр									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	141	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Мисал. $\sqrt{9025}$ ны табарга.

Чишү. Таблицадан 9025 санын эзләп табабыз. Шул юлдагы иң сул баганадан дистәләр санын билгелибез. Бу сан 9 саны. 9025 санының иң өске юлында берәмлекләр саны урнашкан. Бусы 5 кә тигез.

Җавап: $\sqrt{9025} = 95$.

Мисал. Исәпләргә: $\sqrt{5929} + \sqrt{40,96} + \sqrt{0,1225}$.

Чишү. Таблица ярдәмендә табабыз:

$\sqrt{5929} = 77$.

$\sqrt{40,96}$ — таблицада бу сан юк, ләкин аңа охшаган

$\sqrt{4096} = 64$ бар, димәк, $\sqrt{40,96} = 6,4$.

$\sqrt{0,1225}$ — таблицада бу сан юк, тик охшаш сан бар,

$\sqrt{1225} = 35$, димәк, $\sqrt{0,1225} = 0,35$.

Шулай итеп,

$$\sqrt{5929} + \sqrt{40,96} + \sqrt{0,1225} = 77 + 6,4 + 0,35 = 83,75.$$

$\sqrt{121}$ ны табыйк. Таблица буенча $\sqrt{121} = 11$ не таптык. Тикшереп карыйбыз: $11 \cdot 11 = 121$. Ләкин үз-үзенә тапкырлагач 121 не

биргән тагын бер сан, (−11) саны бар: (−11) · (−11) = 121. Димәк, һәрбер уңай саннан ике квадрат тамыр алырга мөмкин. Мәсәлән,

$\sqrt{81} = 9$, чөнки $9 \cdot 9 = 81$ һәм $\sqrt{81} = -9$, чөнки $(-9) \cdot (-9) = 81$. Уңай тамырны арифметик тамыр дип атарга килешкәннәр.

Билгеләмә. Тискәре булмаган саннан тискәре булмаган квадрат тамыр **арифметик тамыр** дип атала.

Тамырлар белән гамәлләр эшләргә кирәк булса, арифметик тамырларны гына алырга кирәк, мәсәлән,

$$\sqrt{36} + \sqrt{25} = 6 + 5 = 11.$$

Әгәр тигезләмәләр чишәргә кирәк булса, тамырларның икесен дә — арифметик тамырны да, арифметик булмаганын да алырга кирәк.

Мисал. Тигезләмәләрне чишәргә:

$x^2 = 144,$

$x = \sqrt{144},$

$x_1 = 12$ һәм $x_2 = -12,$

$y^2 - 6400 = 0$

$y^2 = 6400$

$y = \sqrt{6400}$

$y_1 = 80$ һәм $y_2 = -80,$

$\sqrt{100}$, $\sqrt{110}$, $\sqrt{120}$ һәм $\sqrt{121}$ не исәпләргә кирәк ди.

Табабыз: $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{121} = 11$.

110 һәм 120 саннары таблицада юк. Тик әле бу саннардан квадрат тамыр алып булмый дигән сүз түгел.

$\sqrt{100} = 10$ — бөтен сан, $\sqrt{110}$ бөтен сан була алмый. Мондый тамырның кыйммәтен якынча гына исәпләргә мөмкин.

Андый саннар **иррациональ** саннар дип атала. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$ саннары — иррациональ саннар.

$\sqrt{100} = 10,$

$\sqrt{110} \approx 10{,}48809$

$\sqrt{120} \approx 10{,}95445$

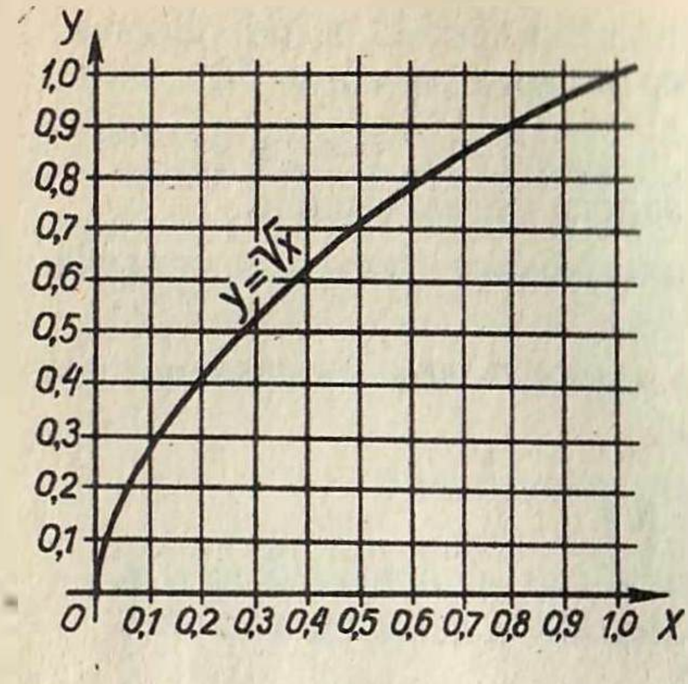
$\sqrt{121} = 11.$

Димәк, 110 һәм 120 саннарыннан квадрат тамырлар 10 һәм 11 саннары арасында урнашкан. Мондый тамырларны таблицалар, калькуляторлар, компьютерлар ярдәмендә якынча табалар.

$y = \sqrt{x}$ функциясенең графигы

Таблица төзибез. xның кыйммәтләрен үзебез билгелибез, ә yның кыйммәтләрен таблицалар ярдәмендә табабыз.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y	0	0,31	0,45	0,55	0,63	0,71	0,77	0,84	0,89	0,95	1



Рәс. 31

Графикны төзибез (рәс. 31).

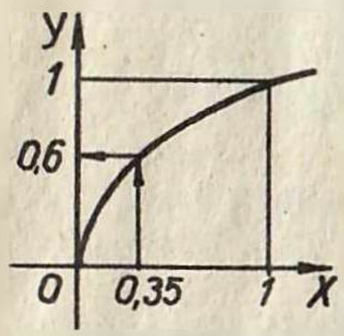
График буенча ике мәсьәлә чишик.

Мисал. График ярдәмендә $\sqrt{0,35}$ не табарга (рәс. 32).

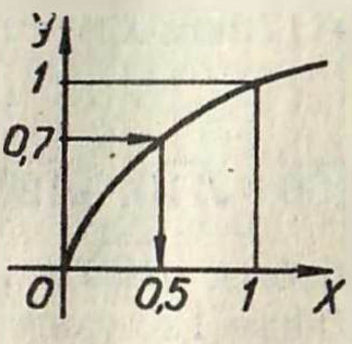
Җавап: $\sqrt{0,35} \approx 0,6$.

Мисал. График ярдәмендә $\sqrt{x} = 0,7$ тигезләмәсен чишәргә (рәс. 33).

Җавап: $x \approx 0,5$.



Рәс. 32



Рәс. 33

Мисал. $y = \sqrt{x}$ функциясенең графигы $A(-7921, 89)$ һәм $B(7921, 89)$ нокталары аша үтәрме?

Чишү. $A(-7921, 89)$, $x = -7921$, $y = 89$.

$\sqrt{x} = \sqrt{7921}$ — тискәре саннан квадрат тамыр алып булмый. График A ноктасы аша үтми.

$$B(7921, 89),\ x = 7921,\ y = 89.$$

$\sqrt{x} = \sqrt{7921} = 89$, B ноктасының ординатасы да 89 га тигез. График B ноктасы аша үтә.

Тамырларны кушу һәм алу

Тамырларны кушу һәм алу бербуыннарны кушу кагыйдәсе буенча үтәлә.

Кагыйдә. *Охшаш тамырларны кушу өчен аларның коэффициентларын кушарга һәм тамырга тапкырларга кирәк.*

Мисаллар.

$$2\sqrt{a} + 5\sqrt{a} = 7\sqrt{a}, \qquad 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

$$\sqrt{7} - \sqrt{7} = 0, \qquad \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

$$\sqrt{5} + \sqrt{6} + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{6} = 3\sqrt{5} + 4\sqrt{6}.$$

$$\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 1\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}.$$

$$\sqrt{6} + 3\sqrt{6} = 1\sqrt{6} + 3\sqrt{6} = 4\sqrt{6}.$$

$3\sqrt{5} + 4\sqrt{6}$ — кушарга ярамый, чөнки аларның тамырлары төрле.

Мисал. Гадиләштерергә: $3x\sqrt{2} + 2x\sqrt{2} - x\sqrt{2} + 2\sqrt{3} = 4x\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$.

Чишү. $3x\sqrt{2} + 2x2\sqrt{2} = 4x\sqrt{2}$, чөнки $3x + 2x - x = 5x - x = 4x$.

Квадрат тамыр алу — квадратка күтәрү гамәленең киресе ул. Шуңа күрә, әгәр үзара кире ике гамәлне бер-бер артлы үтәсәк, шартта бирелгән сан килеп чыгар.

Әгәр x ка 3 не кушып, аннан соң 3 не алсак, яңадан x килеп чыгар.

Әгәр y ны 7 гә тапкырлап, нәтиҗәне 7 гә бүлсәк, яңадан y саны табылыр.

Әгәр a саныннан квадрат тамыр алып, җавапны квадратка күтәрсәк, a саны табылыр.

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2, \qquad \left(\sqrt{11,3}\right)^2 = 11,3, \qquad \left(\sqrt{x}\right)^2 = x.$$

Моңардан теләсә нинди уңай санны квадрат рәвешендә күрсәтергә мөмкин дип нәтиҗә ясарга була.

Мисаллар. Квадрат рәвешендә күрсәтергә: 9, 169, 100, 101, x, $2y$, -36, $4b^3$.

Чишү. $9 = \left(\sqrt{9}\right)^2 = 3^2$. $\quad 169 = 13^2$, $\quad 100 = 10^2$, $\quad 101 = \left(\sqrt{101}\right)^2$,

$x = \left(\sqrt{x}\right)^2$, $\quad 2y = \left(\sqrt{2y}\right)^2$, $\quad -36$ — мөмкин түгел, $\quad 4a^3 = \left(\sqrt{4a^3}\right)^2$.

Теорема. ***Теләсә нинди тискәре булмаган ($a \geq 0$) саннан арифметик тамыр алырга мөмкин, һәм бары тик берне генә.***

$\sqrt{a}$ ($a \geq 0$) ның булуын исбатлаусыз гына кабул итәрбез, арифметик тамырның бердәнбер икәнлеген исбатлыйк.

Исбатлау.

a саныннан ике арифметик тамыр алып була дип уйлыйк: $\sqrt{a} = b_1$ һәм $\sqrt{a} = b_2$. Ул чагында билгеләмә буенча

$$a = b_1^2 \text{ һәм } a = b_2^2 \text{ , ягъни } b_1^2 = b_2^2 = a.$$

Әгәр $b_1 \neq b_2$, мәсәлән, $b_1 < b_2$ булса, тискәре булмаган буыннардан торган тигезсезлекләрнең үзлеге буенча $b_1^2 < b_2^2$ була һәм без каршылыкка очрадык. Димәк, $b_1 = b_2$, ә бу a санынан бердәнбер арифметик тамыр алып була дигәнне аңлата.

Теорема. ***Теләсә нинди тискәре булмаган а саны өчен*** $\sqrt{a^2} = |a|$.

Исбатлау.

a саны тискәре булмаган сан яисә тискәре сан булырга мөмкин.

1) Әгәр $a \geq 0$ булса, арифметик квадрат тамырның билгеләмәсе буенча $\sqrt{a^2} = a$.

2) Әгәр $a < 0$ булса, $(-a) > 0$. $(-a)$ саны уңай һәм $(-a)^2 = a^2$. Шуңа күрә $\sqrt{a^2} = -a$.

Шулай итеп, $\begin{cases} \sqrt{a^2} = a, \text{ әгәр } a \geq 0 \text{ булса,} \\ -a, \text{ әгәр } a < 0 \text{ булса.} \end{cases}$

Килеп чыккан тигезлекне санның модуле билгеләмәсе белән чагыштырып, $\sqrt{a^2} = |a|$ дигән нәтиҗәгә киләбез. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

Мисаллар. $\sqrt{(-8)^2} = |-8| = 8$, $\sqrt{c^2} = |c|$,

$$\sqrt{(x-y)^2} = |x-y| = \begin{cases} x - y, \text{ әгәр } x \geq y \text{ булса,} \\ y - x, \text{ әгәр } x < y \text{ булса.} \end{cases}$$

20 нче зачет

1. Квадрат тамыр дип нәрсәгә әйтәләр?
2. Нинди саннардан квадрат тамыр алырга мөмкин?
3. Нинди квадрат тамыр арифметик тамыр дип атала?
4. Тамырларны кушу кагыйдәсе.
5. 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 225, 400, 625 саннарыннан квадрат тамыр ничәгә тигез?

"4" ле һәм "5" ле өчен, өстәмә рәвештә арифметик квадрат тамырлар турындагы ике теореманы исбатларга кирәк.

20 нче контроль эш

1. $\sqrt{6084} + \sqrt{16,81} - \sqrt{0,81}$ аңлатмасының кыйммәтен табыгыз.
2. Тигезләмәләрне чишегез: $x^2 = 51,84$ һәм $y^2 - 529 = 0$.

3. $y = \sqrt{x}$ функциясенең графигы $A(1849, -43)$, $B(-1849, 43)$ һәм $C(1849, 43)$ нокталары аша үтәме?

4. Гадиләштерегез: $12\sqrt{11} + 11\sqrt{12} - 5\sqrt{12} - 6\sqrt{11} + \sqrt{11} - \sqrt{12}$.

§ 21. КВАДРАТ ТАМЫРЛАРНЫҢ ҮЗЛЕКЛӘРЕ

$\sqrt{36}$ ны табарга кирәк булсын. $36 = 6^2$ яки $36 = (-6)^2$.

Ләкин $36 = 4 \cdot 9$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $2 \cdot 3 = 6$. Димәк, $\sqrt{36} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$.

Теорема 1. ***Әгәр a һәм b саннары тискәре булмасалар, аларның тапкырчыгышыннан квадрат тамыр бу саннардан алынган тамырлар тапкырчыгышына тигез була.***

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Мисаллар. Исәпләргә: $\sqrt{100 \cdot 64} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{64} = 10 \cdot 8 = 80$.

$$\sqrt{0,49 \cdot 0,81 \cdot 400} = \sqrt{0,49} \cdot \sqrt{0,81} \cdot \sqrt{400} = 0,7 \cdot 0,9 \cdot 20 = 12,6.$$

$$\sqrt{1\frac{7}{9} \cdot 3\frac{6}{25}} = \sqrt{1\frac{7}{9}} \cdot \sqrt{3\frac{6}{25}} = \sqrt{\frac{16}{9}} \cdot \sqrt{\frac{81}{25}} = \frac{4 \cdot \cancel{9}^3}{\cancel{3}_1 \cdot 5} = \frac{12}{5}.$$

Теорема 2. (кире теорема). ***Тамырлар тапкырчыгышы тамырасты саннары тапкырчыгышыннан квадрат тамырга тигез.***

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}.$$

Мисаллар. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ не табарга.

Чишү. Аерым-аерым төгәл тамыр алып булмый. Кире теореманы кулланабыз.

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{3 \cdot 27} = \sqrt{81} = 9.$$

$$\sqrt{1,2} \cdot \sqrt{3\frac{1}{3}} = \sqrt{1,2 \cdot 3\frac{1}{3}} = \sqrt{4} = 2.$$

$$1,2 \cdot 3\frac{1}{3} = 1\frac{2}{10} \cdot 3\frac{1}{3} = 1\frac{1}{5} \cdot 3\frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 1} = 4.$$

Кайсы очракларда туры, ә кайсы очракларда кире теореманы кулланырга? Мисалга игътибар итәргә кирәк, әгәр тамыр тамгасы астында һәрберсеннән тамыр алып була торган саннар торса, алардан тамыр алырга, ә нәтиҗәләрне тапкырларга кирәк.

$$\sqrt{100 \cdot 0,1225} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{0,1225} = 10 \cdot 0,35 = 3,5.$$

$$\sqrt{90^2 - 54^2} = \sqrt{(90 - 54) \cdot (90 + 54)} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{144} = 6 \cdot 12 = 72.$$

Әгәр тамыр тамгасы астында төгәл тамыр алынмый торган саннар торса, бу саннарны тапкырларга, ә аннан соң тамыр алып карарга мөмкин.

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{125} = \sqrt{5 \cdot 125} = \sqrt{625} = 25.$$

Теорема 3. ***Вакланмадан квадрат тамыр санаучыдан квадрат тамырны ваклаучыдан квадрат тамырга бүлгәнгә тигез.***

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Мисал. Исәпләргә: $\sqrt{\frac{100}{121}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{121}} = \frac{10}{11}$, $\sqrt{2\frac{7}{81}} = \sqrt{\frac{169}{81}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{81}} = \frac{13}{9}$.

Теорема 4. (кире теорема). ***Тамырларны бүлүдән соң килеп чыккан өлеш тамырасты аңлатмаларының өлешеннән алынган тамырга тигез.***

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Мисал. Исәпләргә: $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{24}{6}} = \sqrt{4} = 2.$

Кайчан туры теоремадан, ә кайчан киресеннән файдаланырга? Тамырлар тамгасы астында тамыр алына торган саннар торса, башта алардан тамыр алырга, һәм беренче нәтиҗәне икенчесенә бүләргә кирәк.

$$\sqrt{\frac{121}{4}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{4}} = \frac{11}{2} = 5,5.$$

Тамыр тамгасы астында төгәл тамыр алынмый торган саннар торса, башта бүлүне эшләргә, аннан соң тамыр алып карарга кирәк.

$$\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{40}{10}} = \sqrt{4} = 2.$$

Теорема 5. ***Дәрәҗәдән квадрат тамыр алу өчен, нигезне үзгәрешсез калдырырга, ә дәрәҗә күрсәткечен 2 гә бүләргә кирәк.***

$$\sqrt{a^{2n}} = a^n$$

Мисаллар. Гадиләштерергә: $\sqrt{a^{10}} = a^{10:2} = a^5$. $\sqrt{x^4 y^6} = x^2 y^3$;

$\sqrt{p^{30}} = p^{15}$, $\sqrt{2^{14}} = 2^7 = 128$.

Мисаллар. Гадиләштерергә: $\sqrt{0,36 \cdot a^6 b^{10}} = 0,6a^3 b^5$,

$\sqrt{\frac{100x^{12}y^2}{p^{14}}} = \frac{10x^6 y}{p^7}$, $\sqrt{c^7}$ — бөтен күрсәткечле тамыр алынмый.

Тапкырлаучыны тамыр тамгасы астыннан чыгару

Мисаллар. Гадиләштерергә: $\sqrt{a^{11}}$. $\sqrt{a^{10}} = a^5$, ләкин $\sqrt{a^{11}} =$

$$= \sqrt{a^{10} \cdot a} = \sqrt{a^{10}} \cdot \sqrt{a} = a^5 \sqrt{a}.$$

Бу очракта без a^{11} сен ике тапкырлаучының тапкырчыгышы итеп алдык. $a^{11} = a^{10} \cdot a$. a^{10} сеннән тамыр алына, ә a дан — алынмый.

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

Кагыйдә. *Тапкырлаучыны тамыр тамгасы астыннан чыгару өчен тамырасты аңлатмасын тамыр алына торган һәм алынмый торган ике тапкырлаучыга таркатырга, беренчесеннән тамыр алырга, ә икенчесен тамыр тамгасы астында калдырырга кирәк.*

Мисаллар. $\sqrt{125} = \sqrt{25 \cdot 5} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$, $\sqrt{12x^9} =$

$$= \sqrt{4 \cdot 3 \cdot x^8 \cdot x} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{x^8} \cdot \sqrt{3x} = 2x^4 \sqrt{3x}.$$

Мисал. Чагыштырырга: $\sqrt{50}$ һәм $3\sqrt{2}$.

Чишү. Аңлатмаларның кайсысы зуррак икәнлеген бер карауда гына белеп булмый. $\sqrt{50}$ дә тапкырлаучыны тамыр астыннан чыгарабыз.

$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$, $5\sqrt{2} > 3\sqrt{2}$, шулай булгач, $\sqrt{50} > 3\sqrt{2}$.

Мисал. Гадиләштерергә: $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{32} + \sqrt{128}$.

Чишү. $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$, $\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$, $\sqrt{128} = \sqrt{64 \cdot 2} = 8\sqrt{2}$.

$$\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{32} + \sqrt{128} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 15\sqrt{2}.$$

Мисал. Гадиләштерергә: $\sqrt{16n} + \sqrt{25n} - \sqrt{36n} + \sqrt{49p} =$

$$= 4\sqrt{n} + 5\sqrt{n} - 6\sqrt{n} + 7\sqrt{p} = 3\sqrt{n} + 7\sqrt{p}.$$

Тапкырлаучыны тамыр тамгасы астына кертү

Мисал. Чагыштырырга: $3\sqrt{5}$ һәм $4\sqrt{3}$.

Чишү. Алда эшләгәнчә эшләп булмый, чөнки тамыр алырлык саннар юк. 3 һәм 4 саннарын тамыр тамгасы астына кертик.

$$3\sqrt{5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45},$$

$$4\sqrt{3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{48}.$$

$\sqrt{48} > \sqrt{45}$, димәк, $4\sqrt{3} > 3\sqrt{5}$.

Кагыйдә. *Тапкырлаучыны квадратка күтәргәннән соң квадрат тамыр астына кертергә мөмкин.*

Мисаллар. Тапкырлаучыларны квадрат тамыр астына кертергә:

$5\sqrt{2}=\sqrt{25\cdot 2}=\sqrt{50},\quad x\sqrt{3}=\sqrt{x^2\cdot 3}=\sqrt{3x^2},\quad 4a^5\sqrt{b}=\sqrt{16a^{10}b}.$

Мисал. Гамәлләрне бербуынны күпбуынга тапкырлау кагыйдәсе буенча эшләргә: $\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{8}\right)$.

Чишү. $\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{8}\right)=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=$

$$=\sqrt{4}+\sqrt{6}-\sqrt{16}=2+\sqrt{6}-4=\sqrt{6}-2.$$

Мисал. Гамәлләрне эшләргә: $2\sqrt{3}\cdot\left(3\sqrt{2}-4\sqrt{3}+5\sqrt{5}\right)$.

Чишү. 1) $2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2}=6\sqrt{6}$,

2) $2\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3}=8\sqrt{9}=8\cdot 3=24$,

3) $2\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{5}=10\sqrt{15}$.

$$2\sqrt{3}\cdot\left(3\sqrt{2}-4\sqrt{3}+5\sqrt{5}\right)=6\sqrt{6}-24+10\sqrt{15}.$$

Мисал. Гамәлләрне эшләргә: $\sqrt{2a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{2}-\sqrt{3a}\right)$

Чишү. 1) $\sqrt{2a}\cdot\sqrt{a}=\sqrt{2a^2}=a\sqrt{2}$.

2) $\sqrt{2a}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{4a}=2\sqrt{a}$.

3) $\sqrt{2a}\cdot\sqrt{3a}=\sqrt{6a^2}=a\sqrt{6}$

$$\sqrt{2a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{2}-\sqrt{3a}\right)=a\sqrt{2}+2\sqrt{a}-a\sqrt{6}.$$

Мисал. Уртак тапкырлаучыны җәя тышына чыгарырга:

$$a^2+3a=a\cdot(a+3).$$

$$a+3\sqrt{a}=\left(\sqrt{a}\right)^2+3\sqrt{a}=\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+3\right).$$

$$\sqrt{70}-\sqrt{80}=\sqrt{7\cdot 10}-\sqrt{8\cdot 10}=\sqrt{10}\left(\sqrt{7}-\sqrt{8}\right).$$

$$a+\sqrt{ab}=\left(\sqrt{a}\right)^2+\sqrt{ab}=\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right).$$

Мисал. Вакланмаларны кыскартырга:

$$\frac{\sqrt{ab}-\sqrt{bc}}{\sqrt{ax}-\sqrt{cx}}=\frac{\sqrt{b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{\sqrt{7}-7}{\sqrt{14}-\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}-\left(\sqrt{7}\right)^2}{\sqrt{7\cdot 2}-\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}\left(1-\sqrt{7}\right)}{\sqrt{7}\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{1-\sqrt{7}}{\sqrt{2}-1}.$$

$$\frac{10}{10+\sqrt{10}}=\frac{\left(\sqrt{10}\right)^2}{\left(\sqrt{10}\right)^2+\sqrt{10}}=\frac{\left(\sqrt{10}\right)^2}{\sqrt{10}\left(\sqrt{10}+1\right)}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}+1}.$$

Мисал. Күпбуыннарны тапкырлау кагыйдәсе буенча тапкырлагыз.

$$(a-b)(x-5)=ax-5a-bx+5b.$$

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{3}\right)=\sqrt{ab}+\sqrt{3a}+\sqrt{2b}+\sqrt{6}.$$

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)=\sqrt{6}-\sqrt{14}+\sqrt{21}-\sqrt{49}=\sqrt{6}-\sqrt{14}+\sqrt{21}-7.$$

Мисал. Сумманы аермага тапкырлау кагыйдәсе буенча тапкырлагыз.

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

$$\left(\sqrt{3}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{a}\right)=\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{a}\right)^2=3-a.$$

$$\left(\sqrt{xy}+1\right)\left(\sqrt{xy}-1\right)=xy-1.$$

$$\left(c-\sqrt{x}\right)\left(c+\sqrt{x}\right)=c^2-x.$$

$$\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{5}\right)=\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{5}\right)^2=$$

$$=9\sqrt{4}-4\sqrt{25}=9\cdot 2-4\cdot 5=18-20=-2.$$

Мисал. Квадратлар аермасы формуласы буенча тапкырлаучыларга таркатыгыз. $(x^2-9)=(x-3)(x+3)$.

x^2+16 — таркату мөмкин түгел, чөнки бу — квадратлар аермасы түгел, ә суммасы.

$$x-9=\left(\sqrt{x}\right)^2-3^2=\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right).$$

$$x-3=\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right).$$

Мисал. Вакланмаларны кыскартырга.

$$\frac{x^2-121}{x-11}=\frac{(x-11)(x+11)}{x-11}=x+11.$$

$$\frac{x-121}{\sqrt{x}-11}=\frac{(\sqrt{x}-11)(\sqrt{x}+11)}{\sqrt{x}-11}=\sqrt{x}+11.$$

$$\frac{\sqrt{7}-c}{7-c^2}=\frac{\sqrt{7}-c}{(\sqrt{7}-c)(\sqrt{7}+c)}=\frac{1}{\sqrt{7}+c}.$$

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{15}\cdot a}{1-3a^2}=\frac{\sqrt{5}(1+\sqrt{3a})}{(1-\sqrt{3a})(1+\sqrt{3}\cdot a)}=\frac{\sqrt{5}}{1-\sqrt{3a}}.$$

Мисал. Тапкырлауны сумманың квадраты яки аерманың квадраты формуласы буенча эшләгез.

$$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2.$$

$$\left(x+\sqrt{y}\right)^2=x^2+2x\sqrt{y}+\left(\sqrt{y}\right)^2=x^2+2x\sqrt{y}+y.$$

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2=\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{xy}+\left(\sqrt{y}\right)^2=x-2\sqrt{xy}+y.$$

$$\left(\sqrt{7}-\sqrt{11}\right)^2=\left(\sqrt{7}\right)^2-2\sqrt{7\cdot 11}+\left(\sqrt{11}\right)^2=7-2\sqrt{77}+11=18-2\sqrt{77}.$$

$$\left(2\sqrt{x}-x\sqrt{3}\right)^2=\left(2\sqrt{x}\right)^2-2\cdot 2\sqrt{x}\cdot x\sqrt{3}+\left(x\sqrt{3}\right)^2=4x-4x\sqrt{3x}+3x^2.$$

Мисал. Сумманың квадраты яки аерманың квадраты формуласы буенча тапкырлаучыларга таркатырга.

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.$$

$$a^2-2a\sqrt{b}+b=\left(a-\sqrt{b}\right)^2.$$

$$a-2\sqrt{ab}+b=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2.$$

$$x+2\sqrt{3x}+3=\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)^2.$$

А, Б

Теорема 1. $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$.

Исбатлау. a, b һәм ab саннары — тискәре булмаган саннар, димәк, алардан квадрат тамыр алырга мөмкин. Тигезлекнең ике ягын да квадратка күтәрәбез:

$$\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}\right)^2\cdot\left(\sqrt{b}\right)^2=a\cdot b.$$

$$\left(\sqrt{ab}\right)^2 = ab.$$

Килеп чыккан тигезлекләрнең уң яклары үзара тигез, димәк, сул яклары да тигез: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

Теорема 2. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Бу теореманы исбатлау 1 нче теореманы исбатлауга охшаган. Аны үзлегегездән үтәгез.

Теорема 5. $\sqrt{a^{2n}} = a^n$, әгәр $a \geq 0$ булса.

Исбатлау. a — тискәре булмаган сан, димәк, a^{2n} да тискәре түгел һәм a^{2n} санынннан квадрат тамыр алырга мөмкин. Тигезлекнең ике ягын да квадратка күтәрәбез:

$$\left(\sqrt{a^{2n}}\right)^2 = a^{2n}$$

$$\left(a^n\right)^2 = a^{2n}.$$

Табылган тигезлекләрнең уң яклары үзара тигез, димәк, сул яклары да тигез була: $\sqrt{a^{2n}} = a^n$. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

Мисал. Вакланманың ваклаучысында тамырдан котылырга: $\frac{\sqrt{3a}}{\sqrt{2b}}$.

Чишү. Вакланманың ваклаучысын да, санаучысын да ваклаучысына тигез санга тапкырлыйк. Вакланманың төп үзлеге буенча, бу вакытта аның кыйммәте үзгәрмәс.

$$\frac{\sqrt{3a}}{\sqrt{2b}} = \frac{\sqrt{3a}\cdot\sqrt{2b}}{\sqrt{2b}\cdot\sqrt{2b}} = \frac{\sqrt{6ab}}{2b},$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+5}} = \frac{1\cdot\left(\sqrt{x+5}\right)}{\sqrt{x+5}\cdot\sqrt{x+5}} = \frac{\sqrt{x+5}}{\left(\sqrt{x+5}\right)^2} = \frac{\sqrt{x+5}}{x+5}$$

$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{7}}$ Бу вакланманың санаучысын да, ваклаучысын да ваклаучысына тигез булган аңлатмага тапкырлаудан файда юк, чөнки ваклаучыда барыбер тамыр килеп чыгачак. Санаучыны да, ваклаучыны да ваклаучыга охшаш, тик капма-каршы тамгалы аңлатмага тапкырлыйк:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{7}} = \frac{1\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{3-7} = -\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{4}$$

21 нче зачет

1. 1, 2, 3, 4 һәм 5 нче теоремалар ничек укыла?
2. Тапкырлаучыны тамыр тамгасы астыннан чыгару кагыйдәсе.
3. Тапкырлаучыны тамыр тамгасы астына кертү кагыйдәсе.

"4" ле өчен, өстәмә итеп, 1 һәм 5 теоремаларны исбатларга кирәк.

"5"ле өчен, өстәмә итеп, 3 теореманы исбатларга кирәк.

21 нче контроль эш

1. Гадиләштерегез: а) $3\sqrt{5} + 2\sqrt{50} - 6\sqrt{18} - 2\sqrt{45}$;

б) $\left(\sqrt{11} - \sqrt{10}\right)^2$; г) $\left(\sqrt{7} + \sqrt{14} - \sqrt{21}\right) \cdot \sqrt{7}$;

в) $\left(\sqrt{6} + \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6} - \sqrt{5}\right)$; д) $\left(15\sqrt{5}\right)^2$.

2. Чагыштырыгыз: $7\sqrt{11}$ һәм $5\sqrt{13}$, $\sqrt{200}$ һәм $9\sqrt{2}$.
3. Вакланмаларны кыскартыгыз.

$\dfrac{y-5}{\sqrt{y}-\sqrt{5}}$; $\dfrac{11+\sqrt{11}}{\sqrt{2}+\sqrt{22}}$; $\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{35}}{\sqrt{15}-\sqrt{5}}$.

§ 22. КВАДРАТ ТИГЕЗЛӘМӘЛӘР

Билгеләмә. $ax^2 + bx + c = 0$ рәвешендәге (биредә a, b, c — бирелгән саннар) тигезләмә **квадрат тигезләмә** дип атала. a, b, c саннары коэффициентлар дип аталалар, a — беренче коэффициент, b — икенче коэффициент, c — ирекле буын, $a \neq 0$.

Квадрат тигезләмәләргә мисаллар: $5x^2 + 3x - 1 = 0$,

$$x^2 - 2x + 8 = 0, \quad 3x^2 - x = 0, \quad 4x^2 - 1 = 0.$$

Кайбер квадрат тигезләмәләрне безнең чишкәнебез бар инде.

1. $c = 0$ булганда, тигезләмә $ax^2 + bx = 0$ рәвешен ала.

Кагыйдә. *$ax^2 + bx = 0$ рәвешендәге тигезләмә тапкырлаучыларга таркату юлы — уртак тапкырлаучыны җәя тышына чыгару юлы белән чишелә.*

Мисаллар. Тигезләмәләрне чишәргә:

а) $5x^2 + 15x = 0$. $5x$ ны җәя тышына чыгарабыз: $5x(x + 3) = 0$. Тапкырчыгыш тапкырлаучыларның берәрсе нульгә тигез булганда нульгә әйләнә.

$$5x = 0 \quad \text{яки} \quad x + 3 = 0$$
$$x_1 = 0 \qquad\qquad x_2 = -3.$$

Тигезләмәнең ике чишелеше бар.

б) $3x^2 - 7x = 0$ яки $3x - 7 = 0$

$x(3x - 7) = 0$ $\quad 3x = 7$

$x_1 = 0$ $\quad x_2 = \frac{7}{3}$

$ax^2 + bx = 0$ рәвешендәге тигезләмәнең һәрвакыт ике тамыры булуын һәм аларның берсе һәрвакыт нульгә тигез икәнлеген искәртик.

2. $b = 0$ булганда, тигезләмә $ax^2 + c = 0$ рәвешен ала.

Кагыйдә. *$ax^2 + c = 0$ рәвешендәге тигезләмәнең a һәм c коэффициентларының тамгалары төрле булганда гына чишелеше бар. Ул квадратлар аермасы формуласы буенча тапкырлаучыларга таркату юлы белән чишелә.*

Мисал. Тигезләмәләрне чишәргә.

а) $4x^2 - 9 = 0$, сул якны таркатабыз: $(2x - 3)(2x + 3) = 0$

$2x - 3 = 0$ яки $2x + 3 = 0$

$2x = 3$ $\quad 2x = -3$

$x_1 = 1{,}5$ $\quad x_2 = -1{,}5$

б) $x^2 - 5 = 0$, $5 = \left(\sqrt{5}\right)^2$ икәнен беләбез.

$$x^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 0 \qquad \left(x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right) = 0$$

$$x - \sqrt{5} = 0 \quad \text{яки} \quad x + \sqrt{5} = 0$$

$$x_1 = \sqrt{5} \qquad x_2 = -\sqrt{5}.$$

в) $3x^2 + 4 = 0$. Чишелешләре юк, чөнки бу квадратлар аермасы түгел, ә суммасы.

3. $ax^2 + bx + c = 0$ рәвешендәге тигезләмә — тулы квадрат тигезләмә.

Билгеләмә. $D = b^2 - 4ac$ рәвешендәге аңлатма квадрат тигезләмәнең **дискриминанты** дип атала.

Мисаллар. Тигезләмәләрнең дискриминантларын табарга:

а) $2x^2 + 5x + 1 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$, $a = 2$, $b = 5$, $c = 1$

$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 25 - 8 = 17.$

б) $3x^2 - 2x + 1 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$, $a = 3$, $b = -2$, $c = 1$,

$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4 - 12 = -8.$

в) $5x^2 + 2x - 6 = 0$
$ax^2 + bx + c = 0,\ a = 5,\ b = 2,\ c = -6.$
$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-6) = 4 - (-120) = 4 + 120 = 124.$

г) $-2x^2 + 3x + 7 = 0$
$ax^2 + bx + c = 0,\ a = -2,\ b = 3,\ c = 7,$
$D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(-2) \cdot 7 = 9 + 56 = 65.$

д) $3x^2 - x + 2 = 0$
$ax^2 + bx + c = 0,\ a = 3,\ b = -1,\ c = 2,$
$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1 - 24 = -23.$

е) $x^2 - x - 1 = 0$
$ax^2 + bx + c = 0,\ a = 1,\ b = -1,\ c = -1,$
$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5.$

Квадрат тигезләмәләрнең тамырларын табу формулалары

Кагыйдә. *$ax^2 + bx + c = 0$ тулы квадрат тигезләмәсенең тамырлары*

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ һәм $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ *формулалары буенча табылалар.*

Мисал. $12x^2 + 7x + 1 = 0$ тигезләмәсен чишәргә.
Чишү. $a = 12,\ b = 7,\ c = 1,$

$$D = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 12 \cdot 1 = 49 - 48 = 1, \quad \sqrt{D} = \sqrt{1} = 1$$

$$x_1 = \frac{-7+1}{2 \cdot 12} = \frac{-6}{24} = -\frac{1}{4}, \qquad x_2 = \frac{-7-1}{2 \cdot 12} = \frac{-8}{24} = -\frac{1}{3}.$$

Җавап: $x_1 = -\frac{1}{4},\ x_2 = -\frac{1}{3}.$

Тигезләмәләрне чишәргә:

а) $2x^2 + x + 2 = 0 \quad a = 2,\ b = 1,\ c = 2.$
$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 1 - 16 = -15$

$D = \sqrt{-15}$ — тамыр алынмый.

Җавап: чишелеше юк.

б) $4x^2 + 4x + 1 = 0,\ a = 4,\ b = 4,\ c = 1.$

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0, \quad \sqrt{D} = \sqrt{0} = 0$$

$$x_1 = \frac{-4+0}{2 \cdot 4} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}, \qquad x_2 = \frac{-4-0}{2 \cdot 4} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}.$$

Җавап: $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}.$

Бу мисаллардан чыгып, түбәндәге нәтиҗәләрне ясарга мөмкин:

1. Дискриминант уңай булса, тигезләмәнең ике тамыры була.
2. Дискриминант нульгә тигез булса, тигезләмәнең үзара тигез ике тамыры була.
3. Дискриминант тискәре булса, тигезләмәнең чишелешләре булмый.

Мисаллар. Тигезләмәләрне чишәргә:

а) $y^2 - 5y + 6 = 0$, $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$

$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1, \quad \sqrt{D} = \sqrt{1} = 1$$

$$y_1 = \frac{+5+1}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3, \quad y_2 = \frac{+5-1}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

б) $x^2 - x - 12 = 0$, $a = 1$, $b = -1$, $c = -12$

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49, \quad \sqrt{D} = \sqrt{49} = 7.$$

$$x_1 = \frac{+1+7}{2 \cdot 1} = \frac{8}{2} = 4, \quad x_2 = \frac{+1-7}{2 \cdot 1} = \frac{-6}{2} = -3.$$

Квадрат тигезләмәләр ярдәмендә мәсьәләләр чишү

Мәсьәлә. Ике санның суммасы 20 гә, аларның тапкырчыгышы 99 га тигез. Бу саннарны табарга.

Чишү. Беренче санны x дип билгелик, икенче сан $(20 - x)$ булыр. Аларның тапкырчыгышы $x \cdot (20 - x)$ ка тигез. Тапкырчыгышның 99 га тигез икәнлеген исәпкә алып, тигезләмә төзибез: $x \cdot (20 - x) = 99$.

$20x - x^2 - 99 = 0$. Тигезләмәне $ax^2 + bx + c = 0$ рәвешендә языйк:

$-x^2 + 20x - 99 = 0$. Ике якны да (-1) гә тапкырлыйбыз.

$x^2 - 20x + 99 = 0$, $a = 1$, $b = -20$, $c = 99$.

$$D = b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 99 = 400 - 396 = 4. \quad \sqrt{D} = \sqrt{4} = 2$$

$$x_1 = \frac{+20+2}{2 \cdot 1} = \frac{22}{2} = 11, \quad x_2 = \frac{20-2}{2 \cdot 1} = \frac{18}{2} = 9.$$

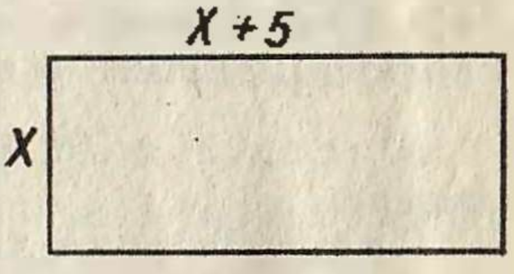
Әгәр беренче сан 11 булса, икенчесе 9 га тигез.

Әгәр беренче сан 9 булса, икенчесе 11 гә тигез.

Җавап: 11 һәм 9.

Мәсьәлә. Турыпочмаклыкның буе иңеннән 5 м га зуррак, ә мәйданы 150 м². Турыпочмаклыкның якларын табарга (рәс. 34).

Чишү.



Рәс. 34

Мәйданның 150 м² икәнлеген исәпкә алып, тигезләмә төзибез.

$x(x + 5) = 150$

$x^2 + 5x - 150 = 0$, $a = 1$, $b = 5$, $c = 150$.

$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1(-150) = 25 + 600 = 625.$

$$\sqrt{D} = \sqrt{625} = 25.$$

$$x_1 = \frac{-5+25}{2 \cdot 1} = \frac{20}{2} = 10, \quad x_2 = \frac{-5-25}{2 \cdot 1} = \frac{-30}{2} = -15,$$

$x + 5 = 10 + 5 = 15$, $\quad -15$ мәсьәләнең шартына туры килми

Җавап: 10 һәм 15

Мәсьәлә. Квадратлары суммасы 221 гә тигез булган, рәттән килүче ике бөтен санны табарга.

Чишү. Кечерәк санны x дип билгеләсәк, зуррагы $x + 1$ булыр.

Беренче санның квадраты x^2. Икенче санның квадраты $(x + 1)^2$. Квадратлар суммасы 221 икәнен исәпкә алып, тигезләмә төзибез.

$x^2 + (x + 1)^2 = 221.$

$x^2 + x^2 + 2x + 1 - 221 = 0$

$2x^2 + 2x - 220 = 0.$ Тигезләмәнең ике ягын да 2 гә бүләбез.

$x^2 + x - 110 = 0,\ a = 1,\ b = 1,\ c = -110.$

$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1(-110) = 1 + 440 = 441.\ \sqrt{D} = \sqrt{441} = 21$

$x_1 = \frac{-1+21}{2 \cdot 1} = \frac{20}{2} = 10, \quad x_2 = \frac{-1-21}{2 \cdot 1} = \frac{-22}{2} = -11.$

Беренче сан 10 булганда икенчесе 11 гә тигез.

Беренче сан — 11 булганда икенчесе — 10 га тигез.

Җавап: мондый ике пар сан бар: 10 һәм 11, -11 һәм -10.

Виет теоремасы

Билгеләмә. Беренче коэффициенты берәмлеккә тигез булган квадрат тигезләмә **китерелгән квадрат тигезләмә** дип атала.

$$x^2 + bx + c = 0.$$

Теләсә нинди квадрат тигезләмәне китерелгән тигезләмәгә әйләндерергә мөмкин.

Мисал. $3x^2 - x - 5 = 0$. Тигезләмәнең ике ягын да 3 кә бүләбез.

$$\frac{3x^2}{3} - \frac{x}{3} - \frac{5}{3} = \frac{0}{3}.$$

$x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{5}{3} = 0$ — китерелгән квадрат тигезләмә.

Виет теоремасы. ***Китерелгән квадрат тигезләмәнең тамырлары суммасы тискәре тамгасы белән алынган икенче коэффициентка, ә тапкырчыгышы ирекле буынга тигез.***

Мисал. $x^2 - 10x + 9 = 0$ тигезләмәсе өчен Виет теоремасын тикшерергә.

Чишү. Тигезләмәнең тамырларын табыйк:

$a = 1,\ b = -10,\ c = 9$

$D = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 100 - 36 = 64,\ \sqrt{D} = \sqrt{64} = 8.$

$x_1 = \frac{10+8}{2 \cdot 1} = \frac{18}{2} = 9, \quad x_2 = \frac{10-8}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1.$

Теореманы тикшерәбез:

Тамырлар суммасы $x_1 + x_2 = 9 + 1 = 10$, тигезләмәдә дә $b = -10$.

Тамырлар тапкырчыгышы $x_1 x_2 = 1 \cdot 9 = 9$, тигезләмәдә дә $c = 9$.

Кире теорема. ***Әгәр ике санның суммасы b га, ә тапкырчыгышы c га тигез булса, бу саннар $x^2 - bx + c = 0$ квадрат тигезләмәсенең тамырлары булалар.***

Мисал. Тамырлары 10 һәм 50 гә тигез булырлык итеп, квадрат тигезләмә төзергә.

Чишү. Тамырлар суммасын эзлибез: $x_1 + x_2 = 10 + 50 = 60$, димәк, $b = -60$.

Тамырлар тапкырчыгышын эзлибез: $x_1 \cdot x_2 = 10 \cdot 50 = 500$, димәк, $c = 500$.

Җавап: $x^2 - 60x + 500 = 0$.

Мисал. Тамырлары $\frac{1}{2}$ һәм $\frac{3}{7}$ булырлык итеп квадрат тигезләмә төзергә.

Чишү. Тамырлар суммасын эзлибез: $\frac{^{7/}1}{2} + \frac{^{2/}3}{7} = \frac{7+6}{14} = \frac{13}{14}$, $b = -\frac{13}{14}$.

Тамырлар тапкырчыгышын эзлибез: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 7} = \frac{3}{14}$, $c = \frac{3}{14}$.

Тигезләмә: $x^2 - \frac{13}{14}x + \frac{3}{14} = 0$. Тигезләмәнең ике ягын да 14 кә тапкырлыйбыз.

Җавап: $x^2 - 13x + 3 = 0$.

А, Б

Квадрат тигезләмәне квадрат аерып чыгару юлы белән чишү

Мисал. Тигезләмәне квадрат аерып чыгару юлы белән чишәргә:

$$4x + 12x + 9 = 0.$$

Чишү. Тигезләмәнең сул ягында сумманың квадраты икәнен искәртик: $(2x + 3)^2$.

$$(2x + 3)^2 = 0,$$
$$(2x + 3)(2x + 3) = 0.$$

Тапкырчыгыш тапкырлаучыларның берсе нульгә тигез булганда нульгә әйләнә.

$2x + 3 = 0$	яки	$2x + 3 = 0$
$2x = -3$		$2x = -3$
$x_1 = -1,5$		$x_2 = -1,5.$

Мисал. $4x^2 + 12x + 8 = 0$ тигезләмәсен квадрат аерып чыгару юлы белән чишәргә.

Чишү. Сул як сумманың квадраты була алмый. Моның өчен ирекле буынның 8 гә түгел, ә 9 га тигез булуы кирәк. Шуңа күрә

сул якка 9 ны башта кушабыз, аннан соң алабыз. Моның белән тигезләмәнең тамырлары үзгәрмәячәк:

$$4x^2 + 12x + 8 + 9 - 9 = 0$$
$$4x^2 + 12x + 9 - 1 = 0$$
$$(2x + 3)^2 - 1 = 0 \text{ — бу квадратлар аермасы}$$
$$(2x + 3 - 1)(2x + 3 + 1) = 0$$
$$(2x + 2)(2x + 4) = 0$$

$$2x + 2 = 0 \quad \text{яки} \quad 2x + 4 = 0$$
$$2x = -2 \qquad\qquad 2x = -4$$
$$x_1 = -1 \qquad\qquad x_2 = -2.$$

Мисал. $3x^2 - 13x + 4 = 0$ тигезләмәсен квадрат аерып чыгару юлы белән чишәргә.

Чишү. Тигезләмәнең ике кисәген дә 3 кә бүләбез:

$$x^2 - \frac{13}{3}x + \frac{4}{3} = 0.$$

Квадрат аерабыз: $-\frac{13}{3}x$ аңлатмасы x һәм ниндидер тапкырлаучының икеләтелгән тапкырчыгышы. Бу тапкырлаучыны табыйк.

$-\frac{13}{3}x = -2 \cdot x \cdot ?$

$? = -\frac{13}{3}x : (-2x) = \frac{13x}{3 \cdot 2x} = \frac{13}{6}$, икенче тапкырлаучы $\frac{13}{6}$.

$$\left(x - \frac{13}{6}\right)^2 = x^2 - 2x \cdot \frac{13}{6} + \left(\frac{13}{6}\right)^2 = x^2 - \frac{13}{3}x + \frac{169}{36}.$$

Бирелгән тигезләмә белән чагыштырабыз:

$$x^2 - \frac{13}{3}x + \frac{169}{36} - \frac{169}{36} + \frac{4}{3} = 0, \qquad \frac{4}{3} - \frac{169}{36} = \frac{48 - 169}{36} = -\frac{121}{36}$$

$$\left(x - \frac{13}{6}\right)^2 - \frac{121}{36} = 0 \text{ — бу квадратлар аермасы}$$

$$\left(x - \frac{13}{6} - \frac{11}{6}\right)\left(x - \frac{13}{6} + \frac{11}{6}\right) = 0$$

$$x - \frac{24}{6} = 0 \quad \text{яки} \quad x - \frac{2}{6} = 0$$

$$x - 4 = 0 \qquad\qquad x - \frac{1}{3} = 0$$

$$x_1 = 4 \qquad\qquad x_2 = \frac{1}{3}.$$

Квадрат тигезләмәләрне чишүнең бу ысулы катлаулы һәм бик сирәк кулланыла. Аны тигезләмәнең тамырларын табу формулаларын чыгарганда файдаланалар.

Квадрат тигезләмәнең тамырлары формулаларын чыгару

$ax^2 + bx + c = 0$. Тигезләмәнең ике кисәген дә a га бүләбез.

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Сумманың квадратын аерабыз.

$\frac{b}{a}x - x$ һәм тагын бер санның икеләтелгән тапкырчыгышы.

$\frac{b}{a}x = 2 \cdot x \cdot ?$, $? = \frac{bx}{a} : 2x = \frac{bx}{a \cdot 2x} = \frac{b}{a \cdot 2}$

Димәк, икенче аңлатма $\frac{b}{2a}$

$$\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0.$$

$$-\frac{b^2}{4a^2} + \frac{{}^{4a/}c}{a} = \frac{-b + 4ac}{4a^2} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0, \text{ ләкин } b^2 - 4ac = D$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2} = 0 \text{ яки } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2 = 0.$$

Квадратлар аермасы табылды.

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right) = 0.$$

$$x + \frac{b - \sqrt{D}}{2a} = 0 \quad \text{яки} \quad x + \frac{b + \sqrt{D}}{2a} = 0.$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Виет теоремасы

$ax^2 + bx + c = 0$ квадрат тигезләмәсенең тамырлары суммасы $-\frac{b}{a}$ га, ә тапкырчыгышы $\frac{c}{a}$ га тигез.

Исбатлау. $ax^2 + bx + c = 0$ тигезләмәсенең тамырлары $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ һәм $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ га тигез.

Аларның суммасын табыйк:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{D}-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

Шуны исбатларга кирәк иде дә.

$$x_1 x_2 = \frac{\left(-b+\sqrt{D}\right)\left(-b-\sqrt{D}\right)}{2a\cdot 2a} = \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{D}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2} =$$

$= \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$, шуны исбатларга кирәк иде дә.

Нәтиҗә. $x^2 + bx + c = 0$ китерелгән квадрат тигезләмәсенең тамырлары суммасы — b га, тапкырчыгышы c га тигез.

Мисал. $0{,}01x^2 - 2x + 0{,}3 = 0$ тигезләмәсенең тамырлары нинди тамгалы?

Чишү. $c = +0{,}3$, димәк, тамырлар бертөрле тамгалы булыр. $b = -0{,}2$, димәк, тамырлар суммасы "плюс" тамгасын ала.

Мисал. $0{,}2y^2 + 0{,}3y - 0{,}01 = 0$ квадрат тигезләмәсенең тамырлары нинди тамгалы?

Чишү. $c = -0{,}01$, димәк, тамырлар төрле тамгалы. $b = +0{,}3$, димәк, тамырлар суммасы тискәре, ягъни тискәре тамырның модуле зуррак дигән сүз.

Җавап: тамырлар төрле тамгалы, тискәре тамыр модуле буенча зуррак.

Мисал. $x^2 + bx + 30 = 0$ тигезләмәсенең бер тамыры 5 кә тигез. b ның кыйммәтен һәм икенче тамырны табарга.

Чишү. $c = 30 = x_1x_2$

$30 = 5\cdot x_2$

$x_2 = 6$

$x_1 + x_2 = -b, \quad 5 + 6 = -b, \quad b = -11$

Җавап: $x_2 = 6$, $b = -11$.

Биквадрат тигезләмәләрне чишү

Билгеләмә. $ax^4 + bx^2 + c = 0$ рәвешендәге тигезләмә **биквадрат тигезләмә** дип атала.

Биквадрат тигезләмәләр билгесезне алыштырып кую юлы белән чишеләләр.

Мисал. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. $x^2 = y$ дип билгелибез, ул чагында $x^4 = y^2$ һәм тигезләмә $y^2 - 13y + 36 = 0$ рәвешен ала. $a = 1$, $b = -13$, $c = 36$.

$D = b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4\cdot 1\cdot 36 = 169 - 144 = 25$. $D = \sqrt{25} = 5$.

$$y_1 = \frac{13+5}{2\cdot 1} = \frac{18}{2} = 9, \qquad y_2 = \frac{13-5}{2\cdot 1} = \frac{8}{2} = 4,$$

ләкин $y = x^2$, моннан $x = \sqrt{y}$.

$$x^2 = 9 \qquad \text{яки} \qquad x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 - 9 = 0 \qquad\qquad x^2 - 4 = 0$$
$$(x-3)(x+3) = 0 \qquad\qquad (x-2)(x+2) = 0$$
$$x_1 = 3, \quad x_2 = -3, \qquad\qquad x_3 = 2, \quad x_4 = -2.$$

Мисал. $(x^2 - 5x)^2 + 5(x^2 - 5x) - 6 = 0$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. $(x^2 - 5x) = y$ дип билгелибез.

$y^2 + 5y - 6 = 0$. Бу тигезләмәне чишеп, $y_1 = 1$ һәм $y_2 = -6$ ны табабыз. Ләкин $y = x^2 - 5x$, шунлыктан

$$x^2 - 5x = 1 \qquad \text{һәм} \qquad x^2 - 5x = -6$$
$$x^2 - 5x - 1 = 0 \qquad\qquad x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Бу тигезләмәләрне чишеп, табабыз:

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}, \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2}, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 2.$$

22 нче зачет

1. Нинди тигезләмә квадрат тигезләмә дип атала?
2. $ax^2 + bx = 0$ рәвешендәге тигезләмәне чишү кагыйдәсе.
3. $ax^2 + c = 0$ рәвешендәге тигезләмәне чишү кагыйдәсе.
4. Нинди аңлатма дискриминант дип атала?
5. Тулы квадрат тигезләмәне чишү кагыйдәсе.
6. Тулы квадрат тигезләмәнең тамырлары формулаларын чыгару.
7. Виет теоремасы ничек укыла?

"4" һәм "5" билгесе өчен квадрат тигезләмәнең тамырлары формулаларын чыгарырга, Виет теоремасын исбатларга һәм түбәндәге сорауларга җавап бирергә кирәк:

а) нинди тигезләмәне биквадрат тигезләмә дип атыйлар?

б) биквадрат тигезләмә ничек чишелә?

22 нче контроль эш

1. Тигезләмәләрне чишегез:

а) $121x^2 - 625 = 0$, б) $81x^2 - 9x = 0$,
в) $3x^2 - 22x + 7 = 0$, г) $x^2 - 12x + 20 = 0$,
д) $x^2 - 4x + 11 = 0$.

2. Турыпочмаклыкның иңе буеннан 10 см га кыскарак. Турыпочмаклыкның мәйданы 75 см^2. Аның якларын табыгыз.

3. Тамырлары бирелгән саннар булырлык итеп квадрат тигезләмәләр төзегез:

а) -2 һәм -20, б) 2 һәм 20, в) -2 һәм 20.

§ 23. ВАКЛАНМАЛЫ РАЦИОНАЛЬ ТИГЕЗЛӘМӘЛӘР

Билгеләмә. Ваклаучысында билгесез сан булган тигезләмә **вакланмалы рациональ тигезләмә** дип атала.

Мисал. $\frac{x-1}{x+1}=0$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Вакланма санаучысы нульгә тигез, ә ваклаучысы нуль булмаган очракта нульгә тигез була. Санаучыны нульгә тигезлибез: $x-1=0$. Моннан $x=1$.

Ваклаучыны тикшерәбез. Ул нульгә тигез булмаска тиеш: $x+1\neq 0$. Моннан $x\neq -1$.
$x=1$ җавабын $x\neq -1$ җавабы белән чагыштырабыз. Җавап каршылыксыз, дөрес.

Җавап: $x=1$.

Мисал. $\frac{(x-1)^2}{x-1}=0$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Санаучысын нульгә тигезлибез:

$$(x-1)^2=0$$
$$x=1$$

Ваклаучыны тикшерәбез:

$$x-1\neq 0$$
$$x\neq 1$$

$x=1$ һәм $x\neq 1$ җавапларын чагыштырыйк. Җавап каршылыклы булып чыкты.

Җавап: Чишелешләре юк.

Мисал. $\frac{x^2+x-2}{x+2}=0$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Санаучыны нульгә тигезлибез һәм ул тигезләмәне чишәбез.
$D=b^2-4ac=1^2-4\cdot 1(-2)=1+8=9$

$x_1=\frac{-1+3}{2}$ һәм $x_2=\frac{-1-3}{2}$; $x_1=1$ һәм $x_2=-2$

Ваклаучыны тикшерәбез:

$$x+2\neq 0$$
$$x\neq -2$$

Җавапларны тикшергәннән соң $x=1$ тамырының каршылыксыз, дөрес, ә $x=-2$ тамырының дөрес булмавын күрәбез.

Җавап: $x=1$.

Мисал. $\frac{3}{x^2-2x+1}+\frac{2}{1-x^2}=\frac{1}{x+1}$ тигезләмәсен чишәргә.

Ч и ш ү. Барлык кушылучыларны бер якка күчерәбез һәм икенче вакланманың тамгасын үзгәртәбез:

$$\frac{{}^{x+1/}3}{(x-1)^2} - \frac{{}^{x-1/}2}{x^2-1} \frac{{}^{(x-1)^2/}1}{x+1} = 0.$$

Ваклаучы: $(x-1)(x-1)(x+1)$.

$\frac{3x+3-2x+2-x^2+2x-1}{(x-1)(x-1)(x+1)} = 0$, санаучыны гадиләштерәбез:

$$\frac{-x^2+3x+4}{(x-1)(x-1)(x+1)} = 0.$$

Санаучыны нульгә тигезләп, бу тигезләмәне чишәбез:
$-x^2+3x+4=0$
$D=3^2-4\cdot(-1)\cdot4=9+16=25$
$x_1=\frac{-3+5}{-2}$ һәм $x_2=\frac{-3-5}{-2}$. $x_1=-1$, $x_2=4$.

Ваклаучы өчен аңлатма төзибез:

$$(x-1)(x-1)(x+1)\neq0.$$

Моннан $x\neq1$ һәм $x\neq-1$.

-1 һәм 4 тамырларын килеп чыккан кыйммәтләр белән чагыштырып, $x=4$ тамырының дөрес, ә $x=-1$ тамырының каршылыклы булуын күрәбез.

Җ а в а п: $x=4$.

Кагыйдә. Ваклаучысында билгесез сан булган тигезләмәне чишү өчен түбәндәгеләрне эшләргә кирәк:

1. *Барлык кушылучыларны да тигезләмәнең бер ягына чыгарырга һәм уртак ваклаучыга китерергә.*
2. *Килеп чыккан вакланманың санаучысын гадиләштерергә.*
3. *Санаучыны нульгә тигезләп, бу тигезләмәне чишәргә.*
4. *Ваклаучы өчен аңлатма төзергә һәм тамырның нинди саннарга тигез булмаска тиешлеген табарга.*
5. *Тигезләмә тамырлары арасыннан каршылыксыз, яхшыларын сайлап алырга.*
6. *Җавапны язарга.*

М ә с ь ә л ә. Вакланманың ваклаучысы аның санаучысыннан 4 кә зуррак. Санаучыга 17 не, ваклаучыга 7 не кушканнан соң, бирелгән вакланмадан 1 гә зуррак булган вакланма килеп чыга. Бирелгән уңай вакланманы табыгыз.

Ч и ш ү. Бирелгән вакланманың санаучысын x дип билгелик. Ваклаучы $x+4$ булыр. x санаучысын 17 гә зурайткач, ул $(x+17)$ гә әйләнер. $(x+4)$ ваклаучысын 7 гә зурайткач, ул $(x+4+7)$ гә тигезләнер. Таблицаны тутырабыз:

	Санаучы	Ваклаучы	Вакланма
Башта	x	$x+4$	$\frac{x}{x+4}$
Соңыннан	$x+17$	$x+11$	$\frac{x+17}{x+11}$

Соңыннан табылган вакланманың 1 гә зуррак икәнлеген исәпкә алып, тигезләмә төзибез:

$$\frac{x+17}{x+11} - \frac{x}{x+4} = 1.$$

Барлык кушылучыларны да бер якка күчерәбез һәм уртак ваклаучыга китерәбез:

$$\frac{^{x+4/}x+17}{x+11} - \frac{^{x+11/}x}{x+4} - {}^{(x+4)(x+11)/}1 = 0.$$

$$\frac{x^2+17x+4x+68-x^2-11x-x^2-4x-11x-44}{(x+11)(x+4)} = 0$$

Санаучыны гадиләштерәбез:

$$\frac{-x^2-5x+24}{(x+11)(x+4)} = 0.$$

Санаучыны нульгә тигезләп, тигезләмә чишәбез:

$$-x^2 - 5x + 24 = 0.$$

-1 гә тапкырлыйбыз:

$$x^2 + 5x - 24 = 0$$

$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24) = 25 + 96 = 121, \sqrt{D} = \sqrt{121} = 11.$

$x_1 = \frac{-5+11}{2}, \ x_2 = \frac{-5-11}{2}$

$x_1 = 3$, $x_2 = -8$ — мәсьәләнең шартына туры килми. Вакланма уңай.

Вакланма өчен аңлатма төзибез һәм x ның ничәгә тигез була алмавын билгелибез:

$$(x+11)(x+4) \neq 0$$

$$x+11 \neq 0 \qquad x+4 \neq 0$$
$$x \neq -11 \qquad x \neq -4$$

$x = 3$ белән чагыштырып карап, $x = 3$ тигезләмәнең тамыры була алуын күрәбез.

Тикшерү. x урынына 3 санын куеп таблицаны тутырабыз.

	Санаучы	Ваклаучы	Вакланма
Башта	3	$3+4=7$	$\frac{3}{7}$
Соңыннан	$3+17=20$	$7+7=14$	$\frac{20}{14}$

$\frac{^{1/}20}{14} - \frac{^{2/}3}{7} = \frac{20-6}{14} = 1$ — шартка туры килә.

Җавап: $\frac{3}{7}$.

Мәсьәлә. Көймә елга буйлап агым уңаена 28,5 км, агымга каршы 22,5 км йөзә. Барлык юл 8 сәгать дәвам итә. Көймәнең акмый торган судагы тизлеге 7 км/сәг булса, елганың агым тизлеген табыгыз.

Чишү. Агым тизлеген x км/сәг дип билгелибез. Ул вакытта агым уңаена тизлек $(7+x)$ км/сәг, ә агымга каршы $(7-x)$ км/сәг булыр. Көймә агым уңаена 28,5 км йөзә. Димәк, йөзү вакыты $\frac{28,5}{7+x}$ сәг булыр.

Көймә агымга каршы $(7-x)$ км/сәг тизлек белән 22,5 км йөзә. Йөзү вакыты $\frac{22,5}{7-x}$ сәг булыр.

Таблицаны тутырабыз:

	Тизлек, км/сәг	Вакыт, сәг	Юл, км
Агымга каршы	$7-x$	$\frac{22,5}{7-x}$	22,5
Агым уңаена	$7+x$	$\frac{28,5}{7+x}$	28,5

Барлык юлга 8 сәг вакыт китүен исәпкә алып, тигезләмә төзибез:

$$\frac{28,5}{7+x} + \frac{22,5}{7-x} = 8$$

Барлык кушылучыларны бер якка күчереп, уртак ваклаучыга китерәбез.

$$\frac{^{7-x/}28,5}{7+x} + \frac{^{7+x/}22,5}{7-x} \; ^{49-x^2}/8 = 0$$

$$\frac{199{,}5 - 28{,}5x + 157{,}5 + 22{,}5x - 392 + 8x^2}{(7+x)(7-x)} = 0.$$

Санаучыны гадиләштерәбез:

$$\frac{8x^2 - 6x - 35}{(7+x)(7-x)} = 0.$$

Санаучыны нульгә тигезләп, тигезләмәне чишәбез:

$$8x^2 - 6x - 35 = 0$$

$D = (-6)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-35) = 36 + 1120 = 1156$, $\sqrt{1156} = 34$

$x_1 = \frac{6+34}{2 \cdot 8}$ һәм $x_2 = \frac{6-34}{2 \cdot 8}$

$x_1 = \frac{40}{16} = \frac{5}{2} = 2{,}5$

$x_2 = -\frac{28}{16}$ — мәсьәләнең шартына туры килми. Елганың тизлеге тискәре сан була алмый.

Ваклаучы: $(7 + x)(7 - x) = 0$, $x \neq -7$ һәм $x \neq 7$.

Тикшерү. x урынына 2,5 не куеп, таблицаны яңадан тутырабыз. 2,5 чынлап та тигезләмәнең тамыры була, чөнки ваклаучыны тикшереп, $x \neq 7$ һәм $x \neq -7$ икәнен таптык.

	Тизлек, км/сәг	Вакыт, сәг	Юл, км
Агымга каршы	$7 - 2{,}5 = 4{,}5$	$\frac{22{,}5}{4{,}5} = 5$	22,5
Агым уңаена	$7 + 2{,}5 = 9{,}5$	$\frac{28{,}2}{9{,}5} = 3$	28,5

$5 + 3 = 8$ (сәгать) — шартка туры килә.

Җавап: 3 км/сәг.

Мисал. Ике кран бергә эшләп, баржаны 6 сәгатьтә тутыралар. Әгәр краннарның берсе, аерым гына эшләгәндә, икенчесенә караганда 5 сәгатькә тизрәк тутырып бетерә алса, аерым-аерым ничәшәр сәгатьтә тутыра алырлар?

Чишү. Беренче кран үзе генә баржаны x сәгатьтә тутыра алсын ди. Ул вакытта икенче кран аны үзе генә $(x + 5)$ сәгатьтә тутырыр. Баржа берәү генә һәм беренче кран бер сәгатьтә эшнең $\frac{1}{x}$ өлешен, ә икенчесе бер сәгатьтә эшнең $\frac{1}{x+5}$ өлешен үти алыр.

Икесе бергә алар баржаны 6 сәгатьтә тутыра, димәк, бер сәгатьтә алар эшнең $\frac{1}{6}$ өлешен эшли алалар.

Тигезләмә төзибез: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6}$.

Барлык кушылучыларны бер якка күчерәбез һәм уртак ваклаучыга китерәбез.

$$\frac{1}{x}^{\diagup 6(x+5)} + \frac{1}{x+5}^{\diagup 6x} - \frac{1}{6}^{\diagup x(x+5)} = 0 \qquad \frac{6x+30+6x-x^2-5x}{6x\cdot(x+5)} = 0$$

Ваклаучы: $6x(x+5) \neq 0$, $x \neq 0$ һәм $x \neq -5$

Санаучыны гадиләштерәбез: $\frac{-x^2+7x+30}{6x\cdot(x+5)} = 0$

Санаучыны нульгә тигезлибез һәм тигезләмәне чишәбез:
$-x^2+7x+30=0$. Тигезләмәне (-1) гә тапкырлыйбыз.
$x^2-7x-30=0$

$D = (-7)^2 - 4\cdot 1\cdot(-30) = 49+120 = 169$, $\sqrt{169} = 13$

$x_1 = \frac{7+13}{2}$ һәм $x_2 = \frac{7-13}{2}$

$x_1 = 10$, $x_2 = -3$ — шартка туры килми. Вакыт тискәре сан була алмый.

$x = 10$ — тигезләмәнең тамыры, чөнки ваклаучының аңлатмасы $x \neq 0$ һәм $x \neq -5$ не бирде.

Тикшерү. Беренче кран эшне 10 сәгатьтә үти, димәк, бер сәгатьтә ул эшнең $\frac{1}{10}$ ен башкара. Икенче кран эшне $10+5=15$ сәгатьтә үти, димәк, 1 сәгатьтә эшнең $\frac{1}{15}$ ен башкара.

Икесе бергә 1 сәгатьтә алар эшнең $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{3+2}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ өлешен үтиләр.

Барлык эшне үтәү өчен аларга $1 : \frac{1}{6} = 6$ сәгать вакыт кирәк. Шарт буенча да 6 сәгать.

Җавап: 10 сәгать һәм 15 сәгать.

23 нче зачет

1. Нинди тигезләмә вакланмалы рациональ тигезләмә дип атала?
2. Ваклаучысында билгесез сан булган тигезләмәләрне чишү кагыйдәсе.

23 нче контроль эш

1. Тигезләмәне чишәргә: $\frac{y+3}{y^2-y}+\frac{6-y}{1-y^2}=\frac{y+5}{y+y^2}$.

2. Вакланманың ваклаучысы санаучысыннан 7 гә зур. Санаучыга 9 ны кушкач, баштагы вакланмадан 1 гә зуррак булган вакланма килеп чыга. Баштагы вакланманы табарга.

§ 24. ТИГЕЗСЕЗЛЕКЛӘР

Математика курсыннан без түбәндәгеләрне беләбез:

1. Ике санның саннар күчәрендә уңдарак ятканы зуррак була.
2. Теләсә нинди уңай сан нульдән зуррак.
3. Теләсә нинди тискәре сан нульдән кечерәк.
4. Теләсә нинди уңай сан теләсә нинди тискәре саннан зуррак.
5. Теләсә нинди санның квадраты нульдән зур яки нульгә тигез.

Мисал. Чагыштырырга: $\frac{2}{3}$ һәм $\frac{5}{6}$.

Чишү. Бертөрле өлешләрне генә чагыштырырга мөмкин, шуңа күрә ике вакланманы да 6 ваклаучысына китерәбез: $\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 2}{3\cdot 2}=\frac{4}{6}$, $\frac{4}{6}<\frac{5}{6}$, димәк, $\frac{2}{3}<\frac{5}{6}$.

Мисал. 5,326 һәм 5,331 не чагыштырырга.

Чишү. Бу ике санның да берәмлекләре 5, унарлы өлешләре 3, ләкин беренче санның йөзенче өлеше 2, ә икенчесенең — 3, димәк, икенче сан зуррак.

$$5{,}326 < 5{,}331.$$

Мисал. $\frac{2}{3}$ һәм 0,7 не чагыштырырга.

Чишү. $\frac{2}{3}$ не унарлы вакланмага әйләндерик. Моның өчен санаучыны ваклаучыга бүләбез:

$$\begin{array}{r|l} 2 & 3 \\ \hline -20 & 0{,}666... \\ 18 & \\ \hline -20 & \\ 18 & \\ \hline -20 & \\ 18 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

0,666... 0,7 дән кечерәк,

димәк, $\frac{2}{3}<0{,}7$.

Билгеләмә. **Тигезсезлекне исбатлау** — аны ачыктан-ачык тигезсезлек килеп чыгарлык итеп үзгәртү дигән сүз.

М и с а л. $(a-3)\cdot(a-5) < (a-4)^2$ тигезсезлегенең a ның теләсә нинди кыйммәтләре өчен дә дөрес икәнлеген исбатларга.

И с б а т л а у. Тигезсезлекнең ике ягында да гамәлләрне башкарабыз:

$$a^2 - 5a - 3a + 15 < a^2 - 8a + 16.$$

Үзгәрешлеле аңлатмаларны бер якка, саннарны икенче якка күчерәбез:

$$a^2 - 5a - 3a - a^2 + 8a < 16 - 15.$$

Ике якны да гадиләштерәбез: $0 < 1$.

$0 < 1$ дөрес тигезсезлек, димәк, башта бирелгән тигезсезлек тә дөрес. Шуны исбатларга кирәк иде.

Билгеләмә. **Тигезсезлекне чишү** — үзгәрешленең тигезсезлекне дөрес итә торган барлык кыйммәтләрен табу дигән сүз.

М и с а л. $3x + 2 > 10$ тигезсезлеге бирелгән. 1, 2 һәм 3 саннарының кайсылары тигезсезлекнең чишелеше булыр?

Ч и ш ү. Тигезсезлеккә x урынына 1 санын куябыз:
$3x + 2 = 3\cdot 1 + 2 = 3 + 2 = 5 > 10$ дөрес түгел, $x = 1$ — чишелеше булмый.

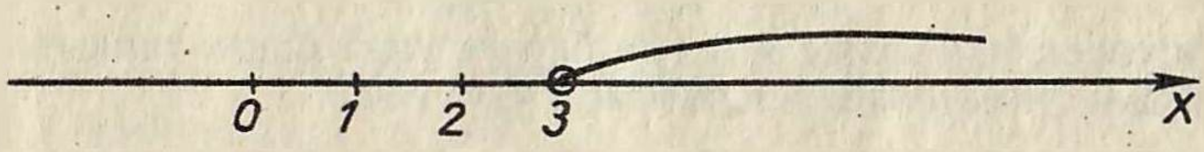
x урынына 2 санын куябыз:
$3x + 2 = 3\cdot 2 + 2 = 6 + 2 = 8 > 10$ — дөрес түгел, $x = 2$ — чишелеше булмый.

x урынына 3 санын куябыз:
$3x + 2 = 3\cdot 3 + 2 = 11 > 10$ — дөрес, $x = 3$ — чишелеш.

Җ а в а п: 3 саны.

Гадәттә, тигезсезлекләрне чишү саннар турысында күрсәтелә. Күчәрнең сул очы минус чиксезлеккә китә: аны $-\infty$ тамгасы белән күрсәтәләр. Уң очы плюс чиксезлеккә китә, аны $+\infty$ тамгасы белән күрсәтәләр.

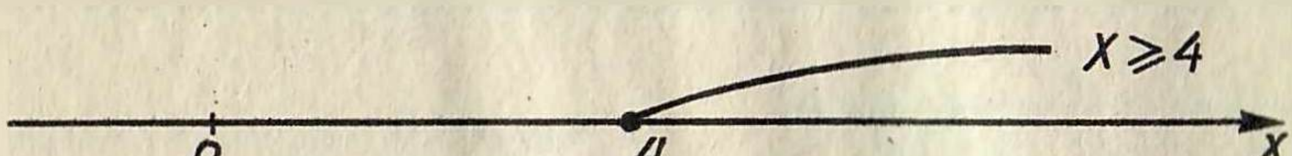
М и с а л. x саннар күчәрендә $x > 3$ аралыгын күрсәтергә.



Рәс. 35. Биредә барлык 3 тән зур саннар урнашкан.

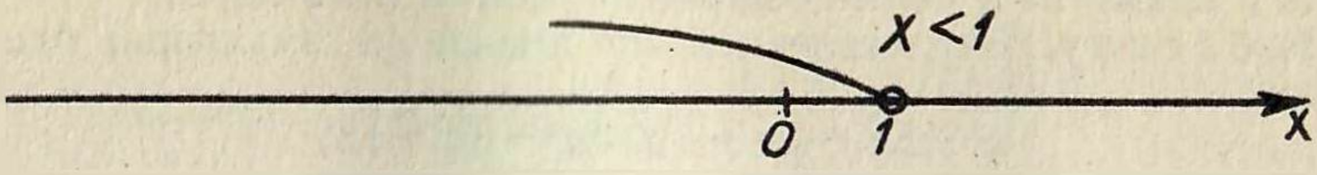
3 саны — тигезсезлекнең чишелеше булмый. Моны $x = 3$ ноктасын әйләнә эченә алып сурәтлиләр.

М и с а л. x лар күчәрендә $x \geq 4$ аралыгын күрсәтергә.



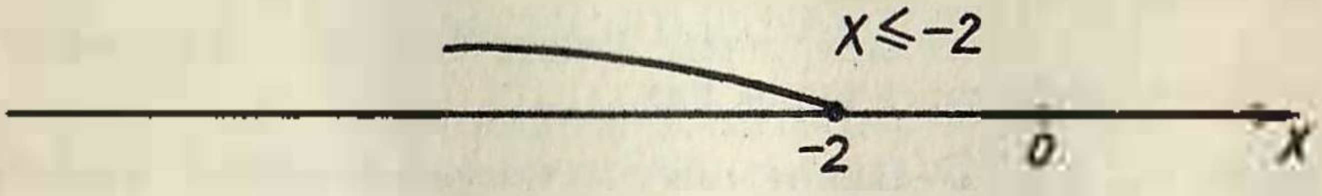
Рәс. 36. Биредә 4 тән зур яки аңа тигез барлык саннар урнашкан. 4 саны $x \geq 4$ тигезсезлегенең чишелеше була һәм $x = 4$ ноктасын буйыйлар.

Мисал. x лар күчәрендә $x < 1$ аралыгын күрсәтергә.



Рәс. 37. Биредә 1 дән кечерәк барлык саннар урнашкан, $x = 1$ чишелешкә керми һәм $x = 1$ ноктасы түгәрәге буялмаган.

Мисал. x лар күчәрендә $x \leq -2$ аралыгын күрсәтергә.



Рәс. 38. Биредә −2 дән кечерәк яки аңа тигез булган барлык саннар урнашкан. $x = -2$ ноктасы түгәрәге буялган.

Мисал. x лар күчәрендә $2 \leq x < 5$ аралыгын күрсәтергә.

Рәс. 39. Биредә 2 дән зуррак һәм 5 тән кечерәк барлык саннар урнашкан. 2 саны чишелешкә керә, ә 5 саны керми.

Тигезсезлекләрнең үзлекләре

1. Тигезсезлекнең ике ягына да бер үк санны кушудан яки алудан тигезсезлекнең тамгасы үзгәрми.

$$a > b \qquad x < y$$
$$a + c > b + c \qquad x - p < y - p$$

2. Тигезсезлекнең ике ягын да бер үк уңай санга тапкырлаудан яки бүлүдән тигезсезлекнең тамгасы үзгәрми.

$$a > b,\ p > 0, \qquad x < y,\ c > 0,$$
$$ap > bp \qquad \frac{x}{c} < \frac{y}{c}$$

3. Тигезсезлекнең ике ягын да бер үк тискәре санга тапкырлаганнан яки бүлгәннән соң тигезсезлек тамгасы капма-каршыга үзгәрә.

$$a > b,\ k < 0, \qquad x < y,\ p < 0,$$
$$ak < bk \qquad \frac{x}{p} > \frac{y}{p}$$

Тигезсезлекләрне чишү кагыйдәләре

Тигезсезлекләрне чишү өчен түбәндәгеләрне эшләргә кирәк.

1. Аның ике ягын да гадиләштерергә.

2. Тамгаларын үзгәртеп, барлык билгесезләрне бер якка, билгеләләрне икенче якка күчерергә.

3. Ике якта да охшаш буыннарны берләштерергә.

4. Билгесезне табу өчен уңай санга бүләргә туры килсә, тигезсезлек тамгасын үзгәртмәскә.

5. Билгесезне табу өчен тискәре санга бүләргә туры килсә, тигезсезлек тамгасын капма-каршыга үзгәртергә.

6. Җавапны күчәрдә күрсәтергә.

Мисал. $3(x+8)+5x<6-3x$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү. Тигезсезлекнең сул ягын гадиләштерәбез:

$$3x+24+5x<6-3x.$$

Билгелеләрне бер якка, билгесезләрне икенче якка күчерик:

$$3x+5x+3x<6-24.$$

Ике якта да охшаш буыннарны берләштерәбез:

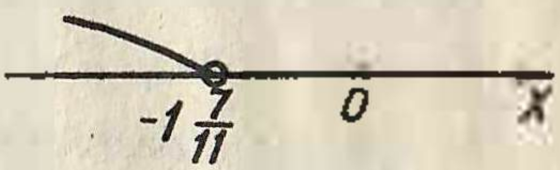
$$11x<-18$$

x ны табабыз. Моның өчен -18 не 11 гә бүләргә кирәк: 11 уңай сан булганлыктан, тигезсезлекнең тамгасы үзгәрми:

$$x<-18:11$$

$$x<-\frac{18}{11}=-1\frac{7}{11}$$

Җавапны күчәрдә күрсәтәбез:



Рәс. 40

Мисал. $2(x-5)+x\geq 5(1+x)$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү. Тигезсезлекнең ике ягын да гадиләштерәбез:

$$2x-10+x\geq 5+5x$$

Тамгаларын үзгәртеп, билгелеләрне бер якка, билгесезләрне икенче якка җыябыз:

$$2x+x-5x\geq 5+10$$

Охшаш буыннарны берләштерәбез: $-2x\geq 15$.

Билгесезне табу өчен 15 не (-2) гә бүләргә кирәк, әмма тискәре санга бүлгәндә, тигезсезлек тамгасы үзгәрәчәк:

$$x\leq 15:(-2)$$

$$x\leq -7{,}5$$

Җавапны күчәрдә сурәтлибез:

Рәс. 41

Мисал. $x + \frac{x+2}{3} > 2x - \frac{x+3}{6}$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү. Тигезсезлекнең ике ягын да уртак ваклаучыга китерәбез:

$$^{6/}x + \frac{^{2/}x+2}{3} > {}^{6/}2x - \frac{^{1/}x+3}{6}, \quad \frac{6x+2x+4}{6} > \frac{12x-x-3}{6}$$

Ике якны да 6 га тапкырлыйбыз. 6 — уңай сан, шуңа күрә тигезсезлекнең тамгасы үзгәрми.

$$6x + 2x + 4 > 12x - x - 3$$
$$6x + 2x - 12x + x > -3 - 4$$
$$-3x > -7$$
$$x < -7 : (-3) \quad \text{Тамга!}$$
$$x < \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$$

Рәс. 42

A, B

Билгеләмә. $a - b$ аермасы уңай булганда, a саны b санынннан зуррак була.

Мисал. $8 - 3 = 5$ аермасы уңай сан, 8 саны 5 тән зуррак.

Билгеләмә. $a - b$ аермасы тискәре булса, a саны b санынннан кечерәк була.

Мисал. $2 - 7 = -5$ аермасы тискәре сан, 2 саны 7 дән кечерәк.

Теорема 1. ***Әгәр $a>b$ һәм $b>c$ булса, $a>c$ була.***

Исбатлау. Безгә $a > c$, ягъни $a - c$ аермасынын уңай, $a - c > 0$ икәнлеген исбатларга кирәк.

Шарт буенча $a > b$, димәк, $a - b > 0$. Шарт буенча $b > c$, димәк, $b - c > 0$. $(a - b)$ һәм $(b - c)$ кушылучылары уңай, шуңа күрә аларның суммасы да уңай була: $(a - b) + (b - c) > 0$. Җәяләрне ачабыз: $a - b + b - c > 0$ яки $a - c > 0$, ягъни $a > c$. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

Теорема 2. ***Тигезсезлекнең ике ягына да бер үк санны кушудан яки алудан тигезсезлекнең тамгасы үзгәрми.***

Бирелгән:

$a>b$

c — теләсә нинди сан

Исбатларга:

$a + c > b + c$

Исбатлау.

Безгә $a + c > b + c$, ягъни $(a + c) - (b + c) > 0$ икәнен исбатларга кирәк. Шарт буенча $a > b$, димәк, $a - b > 0$. Бу тигезсезлекнең сул ягына бер үк c санын кушабыз да, алабыз да.

$a - b + c - c > 0$ яки $a + c - b - c > 0$. Җәяләр эченә алабыз: $(a + c) - (b + c) > 0$. $(a + c) - (b + c)$ аермасы уңай, димәк, $(a + c)$ аңлатмасы $(b + c)$ дан зуррак дигән сүз.

Теорема 3. ***Тигезсезлекнең ике ягын да бер үк уңай санга тапкырлау яки бүлүдән тигезсезлекнең тамгасы үзгәрми.***

Бирелгән:	Исбатлау.
$a > b$ $c > 0$	Безгә $ac > bc$, яки $ac - bc > 0$ икәнлеген исбатларга кирәк.
Исбатларга: $ac > bc$	Шарт буенча $a > b$, димәк, $a - b > 0$. $(a - b)$ уңай санын уңай c санына тапкырласак, уңай $c(a - b) > 0$ саны килеп чыгар.

Җәяләрне ачабыз: $ac - bc > 0$, димәк, $ac > bc$. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

Теорема 4. ***Тигезсезлекнең ике ягын да бер үк тискәре санга тапкырлау яки бүлүдән тигезсезлекнең тамгасы капма-каршыга үзгәрә.***

Бирелгән:	Исбатлау.
$a > b$ $c < 0$	Безгә $ac < bc$, ягъни $ac - bc < 0$ икәнен исбатларга кирәк.
Исбатларга: $ac<bc$	Шарт буенча $a > b$, ягъни $a - b > 0$. $(a - b)$ уңай санын тискәре c санына тапкырласак, тискәре $(a - b)c < 0$ санын табабыз.

Җәяләрне ачабыз: $ac - bc < 0$. Димәк, $ac < bc$, шуны исбатларга кирәк иде дә.

Нәтиҗә. a һәм b уңай саннар, һәм $a > b$ булса, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Исбатлау. Шарт буенча $a > b$. 3 нче теорема буенча, тигезсезлекнең ике ягын да ab уңай санына бүлсәк, тигезсезлекнең тамгасы үзгәрмәс. $\frac{a}{ab} > \frac{b}{ab}$, вакланмаларны кыскартабыз: $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$ яки $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, шуны исбатларга кирәк иде.

Мисал. $5 > 2$, ләкин $\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$.

24 нче зачет

1. Тигезсезлекне исбатлау нәрсә дигән сүз?
2. Тигезсезлекне чишү ни дигән сүз?
3. Тигезсезлекләрне чишү кагыйдәләре.
4. Тигезсезлекләрнең өч үзлеге ничек укыла?
5. "4" ле өчен өстәмә сорауларга җавап бирергә:

а) "a саны b санынннан зуррак" дию нәрсәне аңлата?
б) "a саны b санынннан кечерәк" дию нәрсәне аңлата?
в) 4 нче теореманың нәтиҗәсе ничек әйтелә?

г) 1 нче теорема ничек әйтелә?
д) 2, 3 һәм 4 теоремаларны исбатларга.

"5" ле өчен 1 теореманы һәм 5 теореманың нәтиҗәсен исбатларга.

24 нче контроль эш

1. x ның теләсә нинди кыйммәтләре өчен дә тигезсезлекнең дөрес икәнлеген исбатлагыз:

$$(x+5)(x+6) > (x+2)(x+7).$$

2. Тигезсезлекләрне чишегез:
а) $6y - (y+8) - 3(2-y) > 2$
б) $b(b-1) - (b^2+b) < 34$
в) $x - \frac{2x+3}{2} \leq \frac{x-1}{4}$.

§ 25. ТИГЕЗСЕЗЛЕКЛӘР СИСТЕМАЛАРЫ

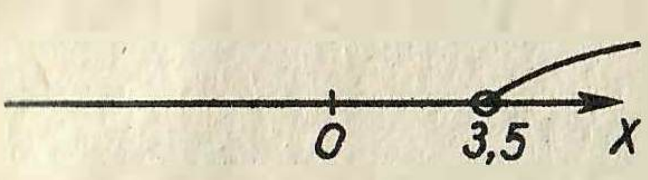
Билгеләмә. **Тигезсезлекләр системасын чишү** — үзгәрешленең ике тигезсезлекне дә канәгатьләндерә торган кыйммәтләрен табу дигән сүз.

Кагыйдә. Тигезсезлекләр системасын чишү өчен түбәндәгеләрне эшләргә кирәк:
1. *Беренче тигезсезлекне чишеп, җавапны күчәрдә күрсәтергә.*
2. *Икенче тигезсезлекне чишеп, җавапны күчәрдә күрсәтергә.*
3. *Әгәр мөмкин булса, ике тигезсезлекне дә канәгатьләндерә торган чишелешләрне сайлап алырга.*
4. *Җавапны язып куярга.*

Мисал. Тигезсезлекләр системасын чишәргә: $\begin{cases} 2x - 1 > 6 \\ 5 - 3x > -13. \end{cases}$

Чишү. Беренче тигезсезлекне чишәбез:

$2x - 1 > 6$
$2x > 6 + 1$
$2x > 7$
$x > 3{,}5.$



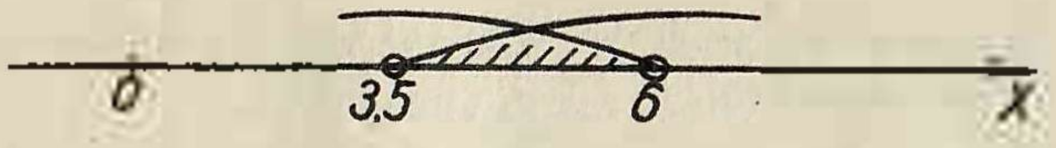
Рәс. 43

Икенче тигезсезлекне чишәбез:

$5 - 3x > -13$
$3x > -13 - 5$
$-3x > -18$
$x < -18 : (-3)$
$x < 6$. Тамга!

Рәс. 44

Ике чишелешне дә бер күчәрдә күрсәтәбез:



Рәс. 45. Бу чишелешләр ике тигезсезлек өчен дә туры килә.

Җавап: $3{,}5 < x < 6$.

Мисал. Тигезсезлекләр системасын чишәргә: $\begin{cases} 3x - 2 > 25 \\ 1 - x < 0. \end{cases}$

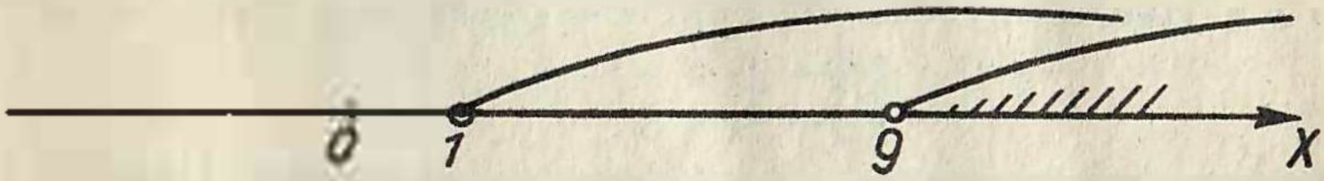
Чишү. Беренче тигезсезлекне чишәбез:

$3x - 2 > 25$
$3x > 25 + 2$
$3x > 27$
$x > 9.$

Икенче тигезсезлекне чишәбез:

$1 - x < 0$
$-x < -1$
$x > -1 : (-1)$ Тамга!
$x > 1.$

Ике чишелешне дә бер үк күчәрдә күрсәтәбез:



Рәс. 46. Бу чишелешләр ике тигезсезлекне дә канәгатьләндерә.

Җавап: $x > 9$.

Мисал. Тигезсезлекләр системасын чишәргә: $\begin{cases} 2 - x > 0 \\ 0{,}2x - 1 < 0. \end{cases}$

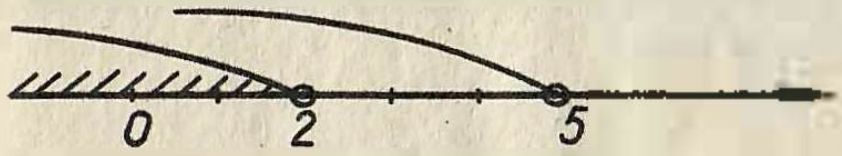
Чишү. Беренче тигезсезлекне чишәбез:

$2 - x > 0$
$-x > -2$
$x < -2 : (-1)$ Тамга!
$x < 2.$

Икенче тигезсезлекне чишәбез:

$0{,}2x - 1 < 0$
$0{,}2x < 1$
$x < 1 : 0{,}2$
$x < 5.$

Ике чишелешне дә бер үк күчәрдә күрсәтәбез:



Рәс. 47. Бу чишелешләр ике тигезсезлек өчен дә дөрес.

Җавап: $x < 2$

Мисал. Тигезсезлекләр системасын чишәргә: $\begin{cases} 2x - 5 > 3 \\ 3x - 1 < 2 \end{cases}$

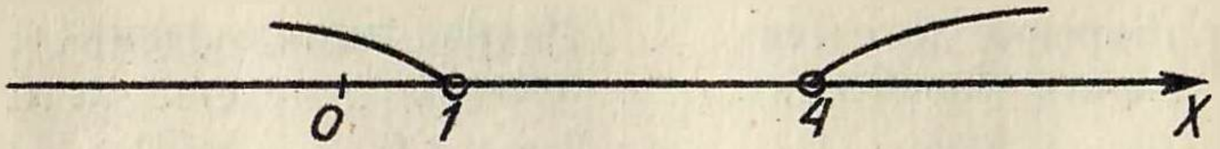
Чишү. Беренче тигезсезлекне чишәбез:

$2x - 5 > 3$
$2x > 5 + 3$
$2x > 8$
$x > 4.$

Икенче тигезсезлекне чишәбез:

$3x - 1 < 2$
$3x < 2 + 1$
$3x < 3$
$x < 1.$

Ике чишелешне дә бер үк күчәрдә күрсәтәбез:



Рәс. 48

Уртак чишелешләр юк.

Җавап: чишелешләре юк.

Мисал. Икеле тигезсезлекне чишәргә: $-1 < 3 + 2x < 3$.

Чишү. Икеле тигезсезлекне система рәвешендә язарга мөмкин:

$$\begin{cases} 3 + 2x > -1 \\ 3 + 2x < 3 \end{cases}$$

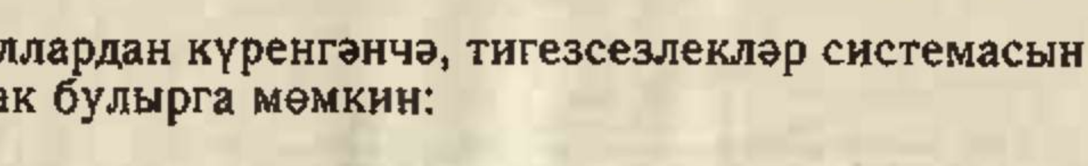
Беренче тигезсезлекне чишәбез:

$3 + 2x > -1$
$2x > -1 - 3$
$2x > -4$
$x > -2.$

Икенче тигезсезлекне чишәбез:

$3 + 2x < 3$
$2x < 3 - 3$
$2x < 0$
$x < 0.$

Ике чишелешне дә бер күчәрдә күрсәтәбез:



Рәс. 49

Җавап: $-2 < x < 0$.

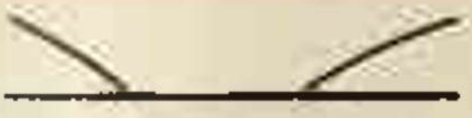
Мисаллардан күренгәнчә, тигезсезлекләр системасын чишкәндә дүрт очрак булырга мөмкин:

Рәс. 50

1. Тигезсезлекләрне чишкәч, ике җавап та "зуррак" якка күрсәтсә, системаның гомуми җавабы зуррак җаваптан зуррак була (рәс. 50).

Рәс. 51

Рәс. 52



Рәс. 53

2. Тигезсезлекне чишкәч, ике җавап та "кечерәк" якка күрсәтсә, системаның җавабы кечерәк җаваптан кечерәк була (рәс. 51).

3. Тигезләмәне чишкәч, җаваплар ике якка күрсәтсә һәм аларның уртак өлешләре булса, бу уртак өлеш системаның җавабы була (рәс. 52).

4. Тигезсезлекләр чишкәч, җаваплар ике якка күрсәтсә һәм аларның уртак өлешләре булмаса, системаның чишелеше булмый (рәс. 53).

М и с а л. Тигезсезлекне чишәргә: $\frac{x-1}{2x-8} \geq 0$.

Ч и ш ү. Вакланма санаучысы да, ваклаучысы да бертөрле тамгалы булганда, нульдән зуррак була. Тигезсезлек ике системага таркала:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2x-8 > 0 \end{cases} \quad \text{яки} \quad \begin{cases} x-1 \leq 0 \\ 2x-8 < 0 \end{cases}$$

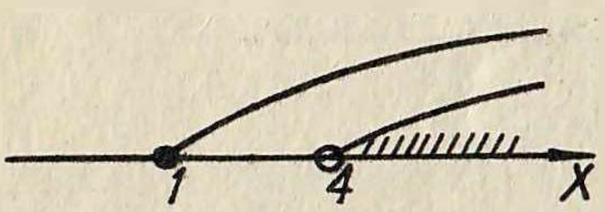
$(2x-8)$ — ваклаучы, шуңа күрә ул нульгә тигез була алмый.

Беренче системаны чишәбез:
Беренче тигезсезлекне чишәбез:

$x-1 \geq 0 \qquad x \geq 1$

Икенче тигезсезлекне чишәбез:

$2x-8 > 0$
$2x > 8 \qquad x > 4$



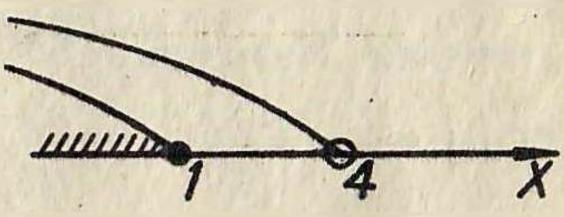
Рәс. 54. Беренче системаның җавабы: $x > 4$

Икенче системаны чишәбез:
Беренче тигезсезлекне чишәбез:

$x-1 \leq 0 \qquad x \leq 1$

Икенче тигезсезлекне чишәбез:

$2x-8 < 0$
$2x < 8 \qquad x < 4$



Рәс. 55. Икенче системаның җавабы: $x < 1$

Җ а в а п: $x > 4$ һәм $x < 1$.

25 нче зачет

1. Тигезсезлекләр системасын чишү ни дигән сүз?
2. Тигезсезлекләр системасын чишү кагыйдәсе.

25 нче контроль эш

1. Тигезсезлекләр системасын чишегез:

$$\begin{cases} 17x - 5(x + 0{,}6) < 3x \\ 2(3{,}5 - x) + 5(2x - 2{,}4) > x - 26. \end{cases}$$

2. Икеле тигезсезлекне чишегез: $-3 < 2x - 1 \leq 3$.

§ 26. БӨТЕН КҮРСӘТКЕЧЛЕ ДӘРӘҖӘ

Алдагы курслардан белгәнебезчә, дәрәҗә — бертөрле тапкырлаучыларның тапкырчыгышы: $a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ тапкыр}}$, монда a — дәрәҗәнең нигезе, n — дәрәҗә күрсәткече, a^n — дәрәҗә.

Шундый кагыйдә чыгарылган иде: нигезләре бертөрле дәрәҗәләрне бүлү өчен, нигезне шул ук калдырып, беренче күрсәткечтән икенчесен алырга кирәк.

$$\boldsymbol{a^n : a^p = a^{n-p}}$$

Бу кагыйдә беренче күрсәткеч икенчесеннән зур булган очракта тикшереп үтелде. Әгәр киресе булса?

Бер яктан $a^3 : a^5 = \frac{a^3}{a^5} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^2}$.

Икенче яктан, кагыйдә буенча, $a^3 : a^5 = a^{3-5} = a^{-2}$.

Бу җавапларны бер үк дип санарга килешкәннәр: $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$.

Билгеләмә. **Тискәре күрсәткечле дәрәҗә** дип санаучысы — берәмлек, ваклаучысы капма-каршы күрсәткече белән алынган шул ук дәрәҗә булган вакланма атала.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Мисал. Исәпләргә: 5^{-3}

Чишү. $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{125}$.

Мисал. Исәпләргә: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

Чишү. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 1 : \frac{1}{9} = \frac{1 \cdot 9}{1} = 9$.

Билгеләмә. Нульдән башка санның **нуленче дәрәҗәсе** берәмлеккә тигез.

$$a^0 = 1.$$

Чынлап та, a^n сен a^n нә, ягъни үз-үзенә бүлгәч, берәмлек килеп чыга.

Мисал. Вакланма рәвешендә язарга: $5x^3y^{-2} \cdot 2^0$.

Чишү. $5x^3y^{-2} \cdot 2^0 = \frac{5x^3}{y^2} \cdot 1 = \frac{5x^3}{y^2}$

Мисал. Нигезе 5 булган дәрәҗә рәвешендә язарга: 25, −25, −125, 0,04, 1, 10 һәм $\frac{1}{5}$.

Чишү. $25 = 5^2$, −25 — мөмкин түгел, $-125 = (-5)^3$, $1 = 5^0$, $0{,}04 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} = 5^{-2}$, 10 — мөмкин түгел, $625 = 5^4$, $\frac{1}{5} = 5^{-1}$.

Дәрәҗәнең үзлекләре

1. Нигезләре бер үк булган дәрәҗәләрне тапкырлау өчен, нигезне шул ук калдырып, күрсәткечләрне кушарга кирәк.

$$a^n \cdot a^p = a^{n+p}.$$

2. Нигезләре бер үк булган дәрәҗәләрне бүлү өчен, нигезне шул ук калдырып, беренче күрсәткечтән икенчесен алырга кирәк.

$$a^n : a^p = a^{n-p}.$$

3. Дәрәҗәне дәрәҗәгә күтәрү өчен, нигезне шул ук калдырып, күрсәткечләрен тапкырларга кирәк.

$$(a^n)^p = a^{np}.$$

Мисал. Гадиләштерергә: $5x^5 \cdot 4x^{-3}$.
Чишү. $5x^5 \cdot 4x^{-3} = 20x^2$, чөнки $5 + (-3) = 5 - 3 = 2$.
Мисал. Гадиләштерергә: $3y^5 : 6x^{-2}$.
Чишү. $3y^5 : 6y^{-2} = 0{,}5y^7$, чөнки $5 - (-2) = 5 + 2 = 7$.
Мисал. Гадиләштерергә: $(3x^{-2})^{-1}$.

Чишү. $(3x^{-2})^{-1} = \frac{1}{3}x^2$, чөнки $(-2) \cdot (-1) = 2$.

Мисал. Гадиләштерергә: $\frac{15x^{-6}}{y^{-5}} \cdot \frac{y^{-3}}{30x^4}$.

Чишү. $\frac{15x^{-6}}{y^{-5}} \cdot \frac{y^{-3}}{30x^4} = \frac{15x^{-6}y^{-3}}{y^{-5} \cdot 30x^4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{-6}y^{-3}y^5x^{-4}}{1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{-10}y^2}{1} = \frac{y^2}{2x^{10}}$

Кагыйдәләр

1. *Тапкырчыгышны дәрәҗәгә күтәрү өчен һәр тапкырлаучыны шул ук дәрәҗәгә күтәрергә кирәк.*

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n.$$

2. *Вакланманы дәрәҗәгә күтәрү өчен санаучыны да, ваклаучыны да шул ук дәрәҗәгә күтәрергә кирәк.*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Мисал. Гадиләштерергә: $(6x^{-3}y^2)^{-2}$.

Чишү. $(6x^{-3}y^2)^{-2} = 6^{-2}x^6y^{-4} = \frac{1}{6^2}x^6y^{-4} = \frac{x^6}{36y^4}$

Мисал. Гадиләштерергә: $\left(\frac{2a^{-3}}{3b^{-2}}\right)^{-1}$.

Чишү. $\left(\frac{2a^{-3}}{3b^{-2}}\right)^{-1} = \frac{2^{-1}\cdot a^3}{3^{-1}b^2} = 2^{-1}\cdot 3^1\cdot a^3\cdot b^{-2} = \frac{3a^3}{2b^2}$.

Мисал. Исәпләргә: $\frac{5^{-5}\cdot 5^2}{5^{-6}}$.

Чишү. $\frac{5^{-5}\cdot 5^2}{5^{-6}} = 5^{-5}\cdot 5^2\cdot 5^6 = 5^3 = 125.$

Мисал. Исәпләргә: $\frac{3^{-5}\cdot 9^{10}}{27^4}$.

Чишү. Нигезләре төрле булган дәрәҗәләрне тапкырларга һәм бүләргә ярамый, тик бу мисалда нигезләрне бертөрле итәргә мөмкин.

$$9 = 3^2, \qquad 27 = 3^3$$

$$\frac{3^{-5}9^{10}}{27^4} = \frac{3^{-5}(3^2)^{10}}{(3^3)^4} = \frac{3^{-5}\cdot 3^{20}}{3^{12}} = 3^{-5}\cdot 3^{20}\cdot 3^{-12} = 3^3 = 27$$

Саннарны түгәрәкләүнең кагыйдәләре

1. Әгәр төшереп калдырыла торган беренче цифр 5, 6, 7, 8, 9 булса, аның алдындагы цифр бер берәмлеккә арта.

2. Әгәр төшереп калдырыла торган беренче цифр 0, 1, 2, 3, 4 булса, аның алдындагы цифр үзгәрешсез кала.

Мисал. Йөзенче өлешләргә кадәр түгәрәкләргә: 0,12345 һәм 0,126321.

Чишү. Йөзенче өлешләргә кадәр түгәрәкләү — йөзенче өлешләрне калдырып, аннан соңгы вакрак өлешләрне төшереп калдыру дигән сүз. Йөзенче өлешнең астына сызабыз: 0,12345. 2 дән соң 3 цифры килә, икенче кагыйдә буенча 2 дән соңгы барлык цифрларны төшереп калдырабыз:

$$0{,}12345 \approx 0{,}12.$$

0,126321. Бу санда 2 дән соң 6 цифры килә, беренче кагыйдә буенча, 2 не бер берәмлеккә арттырабыз:

$$0{,}126321 \approx 0{,}13.$$

Бик зур яки бик кечкенә саннарны язу өчен санның стандарт рәвеше кулланыла.

Билгеләмә. **Санның стандарт рәвеше** дип 1 дән алып 10 га кадәрге сан белән 10 ның нинди дә булса дәрәҗәсе тапкырчышы рәвешендәге язылышка әйтәләр.

Мисал. Стандарт рәвештә язарга: 5 280 000 000 һәм 0,0000056.

Чишү. 5 280 000 000 = 5,28 · 10? Монысын алдан язып куйыйк. 10 санын ничәнче дәрәҗәдә алырга кирәк? Өтер соңгы нуль артыннан иде, ә хәзер 5 артына күчте.

5,280 000 000 — өтерләр арасында 9 цифр, димәк, 10 саны 9 нчы дәрәҗәдә булыр.

$$5\,280\,000\,000 = 5{,}28 \cdot 10^9.$$

Икенче санда өтерне тиешле урынына күчерәбез: 0,0000056— 0,000005,6 — өтерләр арасында 6 цифр, шуның өчен 10 ны минус 6 нчы дәрәҗәдә алабыз.

$$0{,}0000056 = 5{,}6 \cdot 10^{-6}.$$

Билгеләмә. Санның төгәл һәм якынча кыйммәтләре арасындагы аерма **абсолют хата** дип атала һәм Δ хәрефе белән билгеләнә.

Δ — (дельта) — грек алфавиты хәрефе.

Мисал. 18,39 санын берәмлеккә кадәр түгәрәкләргә һәм абсолют хатаны табарга.

Чишү. $18{,}39 \approx 18$, $\Delta = 18{,}39 - 18 = 0{,}39$.

Абсолют хата безнең күпмегә ялгышканыбызны күрсәтә. Ләкин ул хатаның санның нинди өлешен алып торганын күрсәтә алмый. Мәсәлән, әгәр без 2 кг га ялгышканбыз икән, бу ялгышның азмы яки күпме икәнен белә алмыйбыз. Әгәр вагонның массасы үлчәнсә, бу билгеле, бик аз, ә инде кибеттән сатып алынган әйбернең массасы өчен бу бик зур хата булыр. Хата санның нинди өлешен алып тора дигән сорауга җавап йөзеннән, чагыштырма хата дигән төшенчә кертелгән.

Билгеләмә. Абсолют хатаның якынча сан модуленә чагыштырмасын 100% ка тапкырлап табылган сан чагыштырма хата дип атала һәм δ хәрефе белән билгеләнә. δ — (дельта) — грек алфавиты хәрефе.

Мисал. 536 санын дистәгә кадәр түгәрәкләргә һәм чагыштырма хатаны табарга.

Чишү. Дистәгә кадәр түгәрәкләү — дистәләрне генә калдыру дигән сүз:

$$536 \approx 540.$$

Абсолют хатаны табабыз: $\Delta = 540 - 536 = 4$.

Чагыштырма хатаны табабыз: $\delta = \frac{4}{540} \cdot 100\% \approx 0{,}0074 \cdot 100\% = 0{,}74\%$.

26 нчы зачет

1. Нәрсә ул дәрәҗә?
2. Тискәре күрсәткечле дәрәҗә дип нәрсәне атыйлар?
3. Нуленче дәрәҗә сан нәрсәгә тигез?
4. Дәрәҗәләрне тапкырлау кагыйдәсе.
5. Дәрәҗәләрне бүлү кагыйдәсе.
6. Дәрәҗәне дәрәҗәгә күтәрү кагыйдәсе.
7. Тапкырчыгышны дәрәҗәгә күтәрү кагыйдәсе.
8. Саннарны түгәрәкләү кагыйдәсе.
9. Санның стандарт рәвеше дип нәрсәне атыйлар?
10. Нәрсә ул абсолют хата?
11. Нәрсә ул чагыштырма хата?

26 нчы контроль эш

1. Гадиләштерегез:

а) $(36a^3b^{-3}) \cdot (6a^1b^3c)$, б) $\left(\frac{3}{2}x^2y^{-4}\right)^{-2}$

2. Стандарт рәвештә языгыз: 23 000 000 һәм 0,000000000375.

3. Берәмлеккә кадәр түгәрәкләгез, абсолют һәм чагыштырма хаталарны табыгыз: 32,624.

9 нчы сыйныф

§ 27. КВАДРАТ ФУНКЦИЯ

Квадрат өчбуын

Билгеләмә. $ax^2 + bx + c$ рәвешендәге аңлатма квадрат өчбуын дип атала, биредә a, b, c — саннар, $a \neq 0$. $D = b^2 - 4ac$ өчбуынның дискриминанты дип атала.

Өчбуынны нульгә тигезлик. Квадрат тигезләмә табабыз. Әгәр $D < 0$ булса, тигезләмәнең тамырлары юк, һәм өчбуынны тапкырлаучыларга таркатып булмый. Әгәр $D \geq 0$ булса, тигезләмәнең өчбуынның тамырлары дип аталучы ике тамыры була һәм өчбуынны тапкырлаучыларга таркатырга мөмкин.

Теорема 1.1. ***Квадрат өчбуынның дискриминанты тискәре сан булмаса, өчбуын өч тапкырлаучыга таркала:***

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1).\ (x - x_2)$, биредә x_1 һәм x_2— өчбуынның тамырлары.

Исбатлау. $D \geq 0$ булганда, өчбуынның x_1 һәм x_2 гә тигез булган ике тамыры була. Исбатланырга тиешле тигезлекнең уң ягын алып, җәяләрне ачабыз:

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = a(x^2 - xx_2 + x_1x_2 - xx_1) =$$
$$= a(x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1x_2) =$$

x алдындагы буыннарны группалыйбыз:

$$= a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}x) = ax^2 + bx + c,$$

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$. Виет теоремасы буенча, шуны исбатларга кирәк иде дә.

Кагыйдә. Өчбуынны тапкырлаучыларга таркату өчен түбәндәгеләрне эшләргә кирәк:

1. *Өчбуынны нульгә тигезләргә.*
2. *Әгәр $D < 0$ булса, өчбуын тапкырлаучыларга таркалмый. Әгәр $D > 0$ булса, квадрат тигезләмәне чишеп, x_1 һәм x_2 тамырларын табарга.*
3. *Җавапны язарга:* $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Искәрмә. x_1 һәм x_2 тамырлары капма-каршы тамгалары белән языла.

Мисал. Тапкырлаучыларга таркатырга: $3x^2 - 11x + 12$.

Чишү. Өчбуынны нульгә тигезлибез: $2x^2 - 11x + 12 = 0$.

Дискриминантны табабыз: $D = 11^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12 = 121 - 96 = 25$.

$x_{1,2} = \frac{11 \pm 5}{2 \cdot 2}$, $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{3}{2}$

$2x^2 - 11x + 12 = 2 \cdot (x - 4) \cdot (x - \frac{3}{2})$. Җавап матуррак булсын өчен икенче җәяне икегә тапкырлыйбыз.

Җавап: $2x^2 - 11x + 12 = (x - 4) \cdot (2x - 3)$.

Таркатуның дөреслеген тикшерү өчен җәяләрне тапкырлап карарга кирәк.

Мисал. Тапкырлаучыларга таркатырга: $6x^2 + x - 2$.

Чишү. $6x^2 + x - 2 = 0$, $D = 1 - 4 \cdot 6(-2) = 1 + 48 = 49$.

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{2 \cdot 6}$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$.

$6x^2 + x - 2 = 6 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right)$. Җәя эчендә тамырларны капма-каршы тамгалары белән яздык. Җавапны берләштерәбез. $6 = 2 \cdot 3$. Беренче җәяне 2 гә, икенчесен 3 кә тапкырлыйк.

Җавап: $5x^2 + x - 2 = (2x - 1)(3x + 2)$.

Мисал. Вакланманы кыскартырга: $\frac{x + 2}{2x^2 + 3x - 2}$.

Чишү. Вакланманы тапкырлаучыларга таркатабыз: $D = 9 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 25$.

$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{2 \cdot 2}$, $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

$$\frac{x + 2}{2x^2 + 3x - 2} = \frac{x + 2}{2(x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2x - 1}.$$

Мисал. Гамәлләрне эшләргә: $\frac{1}{x^2 - 8x + 15} + \frac{x}{x - 3}$.

Чишү. Беренче вакланманың ваклаучысын тапкырлаучыларга таркатыйк: $x^2 - 8x + 15 = (x - 5)(x - 3)$.

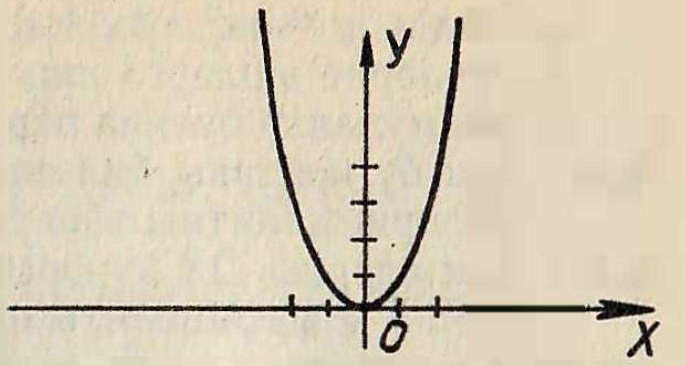
$$\frac{1}{(x - 5)(x - 3)} + \frac{x^{\,x-5/}}{x - 3} = \frac{1 + x^2 - 5x}{(x - 5)(x - 3)} = \frac{x^2 - 5x + 1}{(x - 5)(x - 3)}.$$

$y = ax^2 + bx + c$ функциясенең графигы

$y = x^2$ функциясенең графигын төзик. Моның өчен таблица төзибез. x ка кыйммәтләрне ирекле рәвештә сайлап алабыз, ә y ның кыйммәтләрен $y = x^2$ формуласы буенча исәплибез:

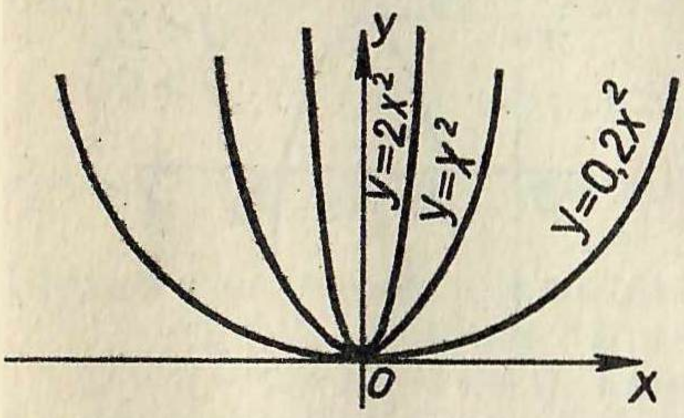
x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	25	16	9	4	1	0	1	4	9

Билгеләмә. $y = x^2$ функциясенең графигы **парабола** дип атала. Аның уң һәм сул өлешләре параболаның тармаклары дип йөртелә (рәс. 56).

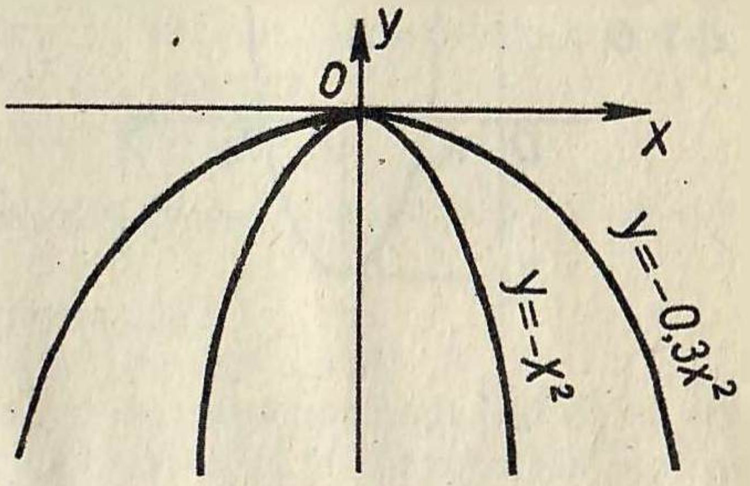


Рәс. 56

Әгәр $y = 2x^2$ функциясенең графигын төзесәк, парабола тармакларының өскә таба тизрәк омтылуларын күрербез. Әгәр $y = 0{,}1x^2$ функциясенең графигын төзесәк, парабола тармаклары өскә таба акрынрак омтылырлар (рәс. 57).



Рәс. 57



Рәс. 58

Әгәр $a < 0$ булса, парабола тармаклары аска таба юнәлер (рәс. 58).

$y = x^2 + bx + c$ функциясенең графигы да — парабола, тик аның түбәсе координаталар башлангычында урнашмый:

Теорема 1.2. ***$y = ax^2 + bx + c$ параболасының түбәсе түбәндәге координаталарга ия:***

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \qquad y_0 = y(x_0).$$

Исбатлау. Теореманы $D \geqslant 0$ очрагы өчен исбатлыйбыз. Әгәр $D \geqslant 0$ булса, өчбуынның тамырлары $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ һәм $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ га тигез.

Түбәсенең абсциссасы тамырларның уртасында ята. Кисемтәнең уртасын табу формулалары буенча исәплибез:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}}{2} = \frac{\frac{-b + \sqrt{D} - b - \sqrt{D}}{2a}}{2} = \frac{\frac{-2b}{2a}}{2} = -\frac{b}{2a}.$$

Ординатасын табу өчен x_0 нең кыйммәтен өчбуын формуласына куеп исәпләргә кирәк: $y = y(x_0)$. Шуны исбатларга кирәк иде дә. $D < 0$ очрагы өчен теореманы исбатлаусыз гына кабул итәрбез.

Кагыйдә. $y = ax^2 + bx + c$ функциясенең графигын төзү өчен түбәндәгеләрне эшләргә кирәк:

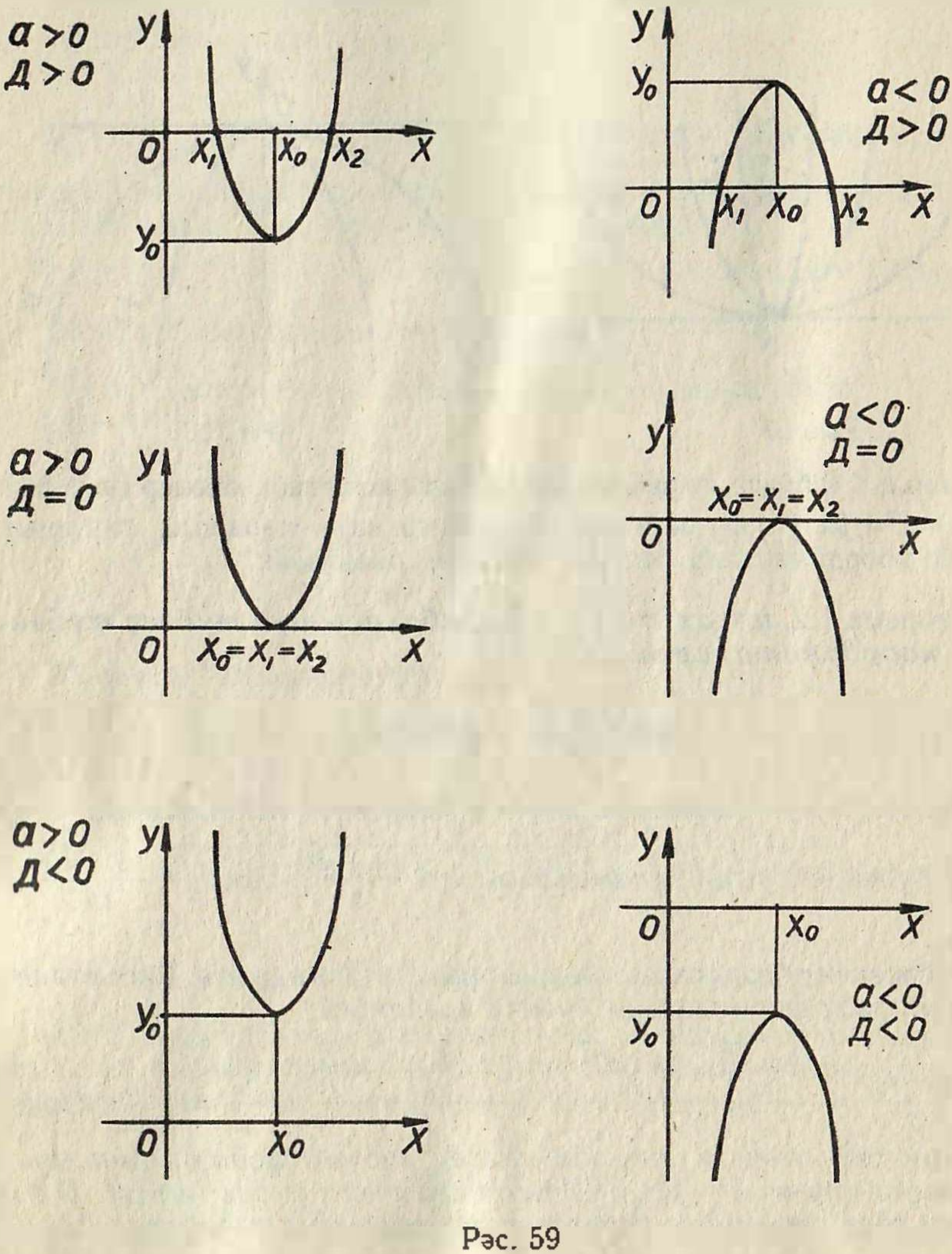
1. Формулалар буенча парабола түбәсенең координаталарын табарга һәм бу ноктаны билгеләргә.

2. Дискриминантны табарга. Әгәр $D \geqslant 0$ булса, тамырларны табарга һәм аларны OX күчәрендә билгеләргә.

3. Әгәр a коэффициенты нульдән зур булса, парабола тармаклары өскә юнәлгән, ә нульдән кечерәк булса — аска юнәлгән.

4. Параболаны төзергә.

Мисал. $y = x^2 + 6x + 8$ функциясенең графигын төзергә.



Рәс. 59

Чишү. Парабола түбәсенең координаталарын табабыз.

$a = 1,\ b = 6,\ x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot 1} = -3.$

$y_0 = (-3)^2 + 6(-3) + 8 = 9 - 18 + 8 = -1$. Димәк, парабола түбәсенең координаталары $(-3, -1)$.

$a = 1 > 0$ булганлыктан, парабола тармаклары өскә юнәлгән. Дискриминантны табабыз: $D = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 32 = 4$.

Тамырларны исәплибез: $x_1 = \frac{-6+2}{2} = -2, \quad x_2 = \frac{-6-2}{2} = -4.$

Координаталар яссылыгында $(-3, -1)$ һәм x лар күчәрендә $(-2, 0)$ һәм $(-4, 0)$ нокталарын билгелибез. Параболаны төзибез.

Координаталар яссылыгында парабола барысы алты төрле торышта булырга мөмкин. Алар барысы да 59 нчы рәсемдә күрсәтелгән.

Мисал. $y = -x^2 + 2x - 1$ графигын төзергә.

Чишү. Түбәнең координаталарын эзлибез:

$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(-1)} = 1$. 1 санын формулага куябыз: $y_0 = -1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = 0$.

Шулай итеп, түбәнең координаталары $(1, 0)$.

$a = -1 < 0$. Парабола тармаклары аска юнәлгән.

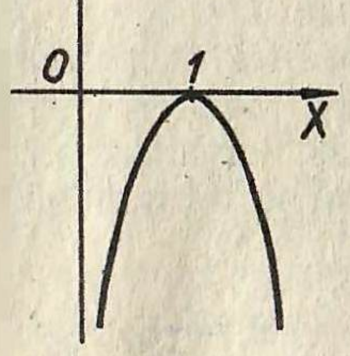
$D = 4 - 4(-1)(-1) = 0$. Таблицадан бу очракны табыйк: бу уң як баганада уртанчы рәсем. Күчәрләрне сызып, $(1, 0)$ ноктасын билгелибез һәм парабола төзибез (рәс. 60).

Мисал. $y = x^2 + 4x + 10$ функциясенең графигын төзергә.

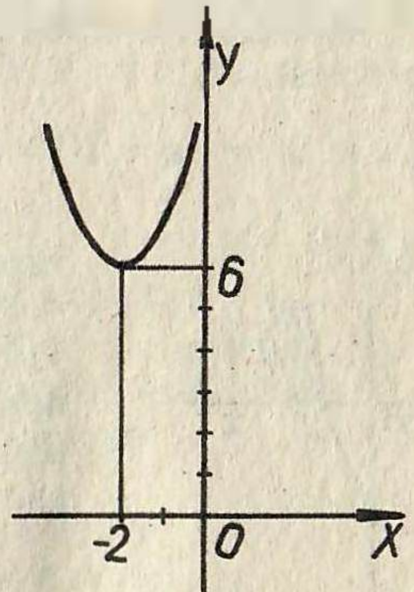
Чишү. Парабола түбәсенең координаталарын табабыз: $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2$. $y_0 = (-2)^2 + 4(-2) + 10 = 4 - 8 + 10 = 6$. Түбә $(-2, 6)$.

$a = 1 > 0$ — тармаклар өскә юнәлгән. $D = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 16 - 40 = -24$ — тамырлар юк.

Таблицадан карыйбыз. Бу сул баганадагы соңгы рәсем. Координаталар яссылыгында $(-2, 6)$ ноктасын билгелибез һәм парабола төзибез (рәс. 61).

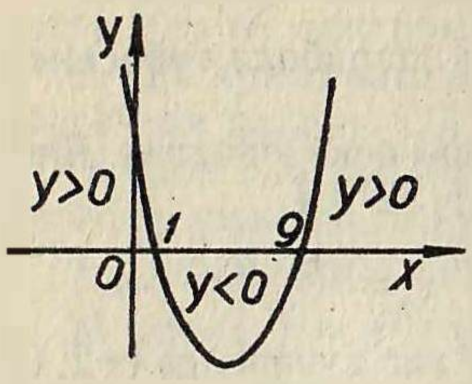


Рәс. 60



Рәс. 61

Квадрат тигезсезлекләр чишү



Рәс. 62

Билгеләмә. $ax^2 + bx + c \begin{smallmatrix} > \\ \geq \\ < \\ \leq \end{smallmatrix} 0$ рәвешендәге тигезсезлекләр **квадрат тигезсезлекләр** дип аталалар.

Рәсемдә $y = x^2 - 10x + 9$ функциясенең графигы төзелгән булсын. x лар күчәре буйлап минус чиксезлектән ($-\infty$) плюс чиксезлеккә ($+\infty$) таба барганда графикның x лар күчәренең аскы өлешендә дә, өске өлешендә дә урнашуын күрәбез. $-\infty$ тән алып 1 гә кадәр барлык x лар өчен график x лар күчәренең өстендә урнаша, ягъни мондый x лар өчен y нульдән зуррак була.

x 1 гә җиткәч, y 0 гә тигезләшә.

1 дән 9 га кадәрге x лар өчен график x лар күчәренең аскы өлешендә урнаша, ягъни мондый x лар өчен $y < 0$. $x = 9$ булганда $y = 0$.

9 дан зуррак булган барлык x лар өчен график x лар күчәреннән өстә урнаша, ягъни бу x лар өчен $y > 0$.

Икенче төрле дә язарга мөмкин:

$y = 0$, $x_1 = 1$ һәм $x^2 = 9$ булганда,
$y > 0$, $x < 1$ һәм $x > 9$ булганда,
$y < 0$, $1 < x < 9$ булганда.

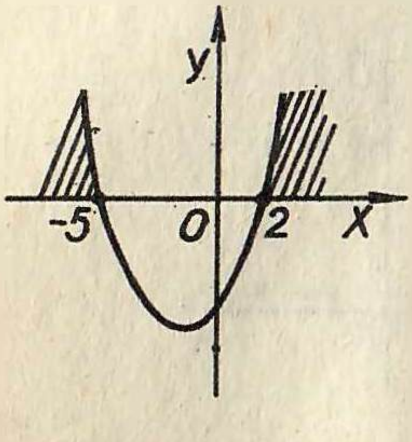
Кагыйдә. Квадрат тигезсезлекне чишү өчен түбәндәгеләрне эшләргә кирәк:

1. *График төзергә.*
2. *Тигезсезлеккә тиңдәш булган өлешләрне табарга.*
3. *Җавапны язарга.*

Тигезсезлекләрне чишкәндә графикны схема рәвешендә генә дә төзергә мөмкин.

$D>0$ булганда, парабола түбәләренең координаталарын исәпләмәскә дә була.

Мисал. $x^2 + 3x - 10 > 0$ тигезсезлеген чишәргә.



Рәс. 63

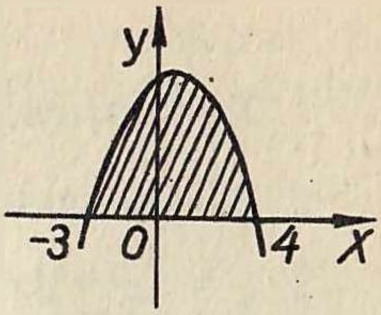
Чишү. Графикны төзибез. $a = 1 > 0$ — тармаклар өскә карый. $D = 9 - 4 \cdot 1(-10) = 49$. Парабола түбәсенең координаталарын эзләмәскә дә мөмкин. Безнең тигезсезлекнең тамгасы—"зуррак", шунлыктан, графикның x лар күчәреннән өстә яткан өлешләрен эзлибез.

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 7}{2}, \qquad x_1 = -5,\ x_2 = 2.$$

Җавап: $x < -5$ һәм $x > 2$.

Мисал. $-x^2 + x + 12 > 0$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү. $a = -1$ — тармаклар аска юнәлә. $D = 1 - 4 \cdot 12(-1) = 49$, түбә координаталарын эзләмәсәк тә була. $x_1 = -3$, $x_2 = 4$. Безнең тигезсезлек тамгасы — "зуррак", шунлыктан, графикның x лар күчәреннән өстә урнашкан өлешләрен эзлибез.



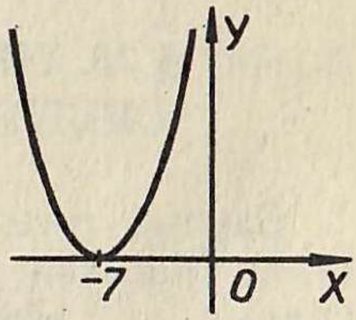
Рәс. 64

Җавап: $-3 < x < 4$.

Мисал. $x^2 + 14x + 49 \geq 0$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү. $a = 1 > 0$ — тармаклар өскә юнәлгән. $D = 196 - 4 \cdot 1 - 49 = 0$, $x_1 = x_2 = -7$.

Тигезсезлекнең тамгасы — "зуррак", нинди x лар өчен графикның x лар күчәреннән өстә ятуын билгелибез. Болар — $x = -7$ дән башка барлык x лар.



Рәс. 65

Җавап: x (-7) дән башка теләсә нинди сан.

Мисал. $x^2 + 14x + 49 \geq 0$ тигезсезлеген чишәргә.

Җавап: x — теләсә нинди сан.

Мисал. $x^2 + 14x + 49 < 0$ тигезсезлеген чишәргә.

Җавап: чишелешләре юк.

Мисал. $x^2 + 2x + 5 > 0$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү. $a = 1 > 0$ — тармаклар өскә юнәлгән. $D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$. Парабола түбәсенең координаталарын эзлибез:

$x_0 = -\frac{2}{2} = -1$, $y_0 = (-1)^2 + 2(-1) + 5 = 4$. $(-1, 4)$ ноктасы. Графикны төзибез. Ул тулысы белән x лар күчәренең өстендә ята.

Җавап: x — теләсә нинди сан.

Мисал. $x^2 + 2x + 5 < 0$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү. График тулысынча x лар күчәренең өске өлешендә урнашкан, димәк, һәрвакыт $y > 0$ һәм график x лар күчәренең аскы өлешендә урнашырлык x лар юк.

Җавап: чишелешләре юк.

27 нче зачет

1. Нинди аңлатма квадрат өчбуын дип атала?
2. Өчбуынны тапкырлаучыларга таркату кагыйдәсе.
3. Нинди тигезсезлек квадрат тигезсезлек дип атала?
4. Квадрат тигезсезлекләр чишү кагыйдәсе.
5. Нәрсә ул парабола?
6. $y = ax^2 + bx + c$ графигын төзү кагыйдәсе.
7. 1.1 һәм 1.2 теоремалары ничек әйтеләләр?
8. "4" һәм "5" ле өчен өстәмә рәвештә 1.1 һәм 1.2 теоремаларын исбатларга.

27 нче контроль эш

1. Тапкырлаучыларга таркатырга: $2x^2 + 3x - 2$.
2. Вакланманы кыскартырга: $\frac{x^2 - 10x + 25}{3x^2 - 17x + 10}$.
3. $y = -x^2 + 3x - 8$ функциясенең графигын төзергә.
4. $2x^2 + 5x - 12 < 0$ тигезсезлеген чишәргә.

§ 28. ТИГЕЗЛӘМӘЛӘРНЕ ҺӘМ ТИГЕЗЛӘМӘЛӘР СИСТЕМАЛАРЫН ГРАФИК ЮЛ БЕЛӘН ЧИШҮ

Барлык тигезләмәләрне дә формулалар буенча чишү мөмкин түгел. Мәсәлән, $x^3 = x + 1$ тигезләмәсен формулалар буенча чишеп булмый.

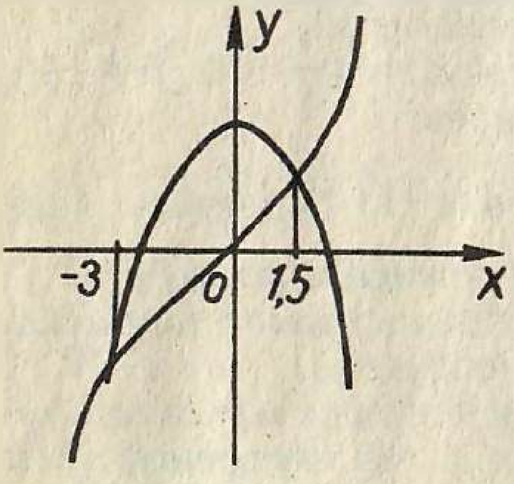
Ләкин бик күп тигезләмәләрне график юл белән якынча чишәргә мөмкин.

Мисал. $x^3 = -x^2 + 4$ тигезләмәсен график юл белән чишәргә.

Чишү. Тигезләмәнең уң һәм сул яклары үзара тигез. Бу ике якны да бер үк хәреф белән билгелибез: $y = x^3$ һәм $y = -x^2 + 4$.

Нокталар буенча башта, $y = x^3$ графигын төзибез:

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	-27	-8	-1	0	1	8



Рәс. 66

Бу — куб парабола. Шушы ук сызымда $y = -x^2 + 4$ графигын да төзибез. Бу— парабола.

$a = -1 < 0$ — тармаклар аска юнәлгән.

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{-2} = 0.$$

$y_0 = 0 + 4 = 4$. Түбә $(0,4)$. $D = 0 - 4 \cdot (-1) \cdot 4 = 16$.
$x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

Куб парабола белән парабола ике ноктада кисешәләр. Димәк, бирелгән тигезләмәнең ике тамыры бар. Җавапларны x лар күчәрендә эзлибез. Графикларның кисешү нокталарының x лар күчәрендәге координаталары — якынча -3 һәм $1,5$.

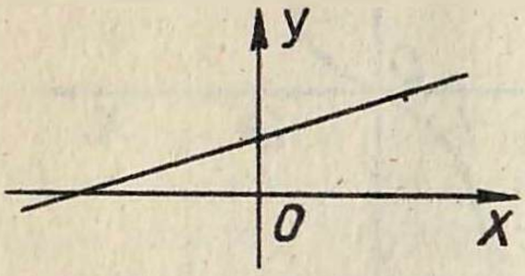
Җавап: $x_1 \approx -3$, $x_2 \approx 1,5$.

Графиклар кисешмәсә, бирелгән тигезләмәнең чишелешләре булмый.

Алдагы сыйныфларда $y = kx + b$, $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{k}{x}$, $x^2 + y^2 = R^2$ функцияләре өйрәнелде. Түбәндә бу функцияләрнең графиклары бирелгән.

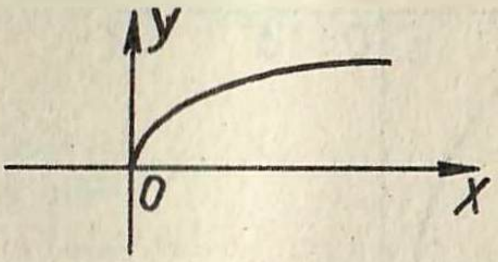
Янында бу графикны төзү өчен ничә нокта кирәклеге язылган. Бу таблицаны тигезләмәләр һәм тигезләмәләр системаларын график юл белән чишү өчен кулланыгыз.

$y = kx + b$ — туры (ике нокта).

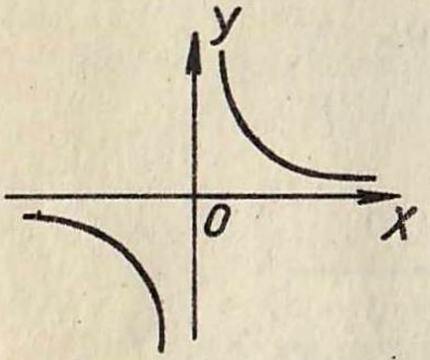


Рәс. 67

$y = \sqrt{x}$ (4—5 нокта).

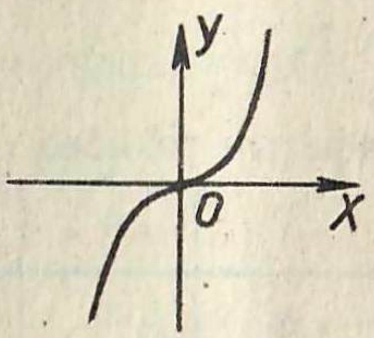


Рәс. 68



Рәс. 69

$y = \frac{k}{x}$ — гипербола (6—8 нокта).



Рәс. 70

$y = x^3$ — куб парабола (5—6 нокта).

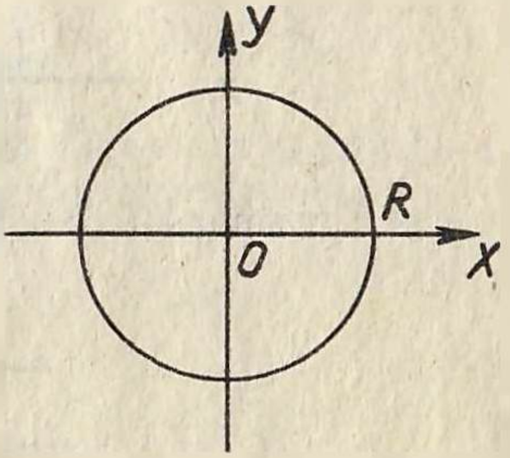
$x^2 + y^2 = R^2$ — үзәге (0, 0) ноктасында булгач, R радиуслы әйләнә.

Кагыйдә. Тигезләмәләрне график юл белән чишү өчен түбәндәгеләрне эшләргә кирәк:

1. *Тигезләмәләрнең уң һәм сул якларын бер үк у хәрефе белән билгеләргә.*

2. *Бер үк сызымда ике график төзергә.*

3. *Кисешү ноктадары булса, бу ноктадарның абсциссаларын җавап итеп алырга.*

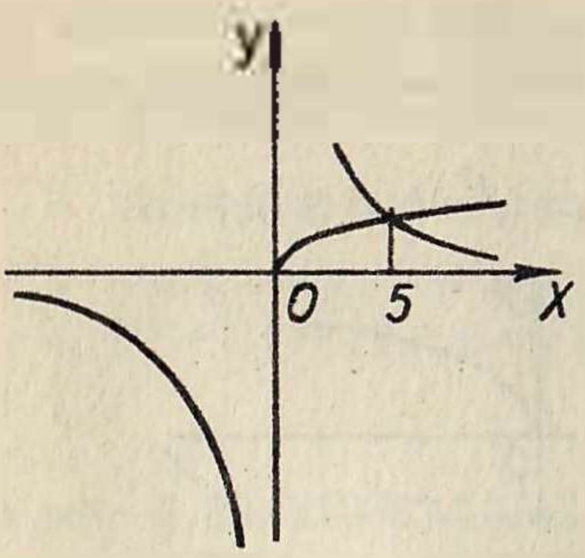


Рәс. 71

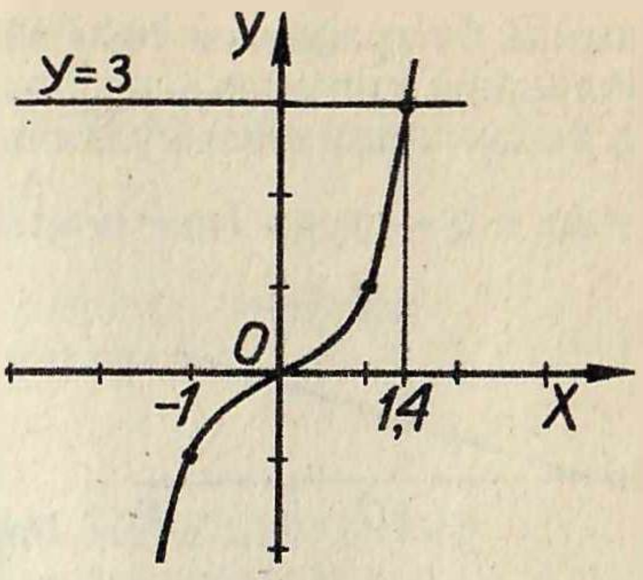
Мисал. График юл белән $\frac{10}{x} = \sqrt{x}$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. $y = \frac{10}{x}$ һәм $y = \sqrt{x}$ дип билгелибез. $y = \frac{10}{x}$ графигын төзибез (рәс. 72).

x	−10	−5	−2	−1	0	1	2	5
y	−1	−2	−5	−10	юк	10	5	2



Рәс. 72



Рәс. 73

$y = \sqrt{x}$ графигын төзибез:

x	9	4	1	0
y	3	2	1	0

Җавап: $x \approx 5$.

Мисал. $x^3 = 3$ тигезләмәсен график юл белән чишәргә.
Чишү. $y = x^3$ һәм $x = 3$ дип билгелибез.
$y = x^3$ графигын төзибез (рәс. 73).

x	−2	−1	0	1	2
y	−8	−1	0	1	8

$y = 3$ графигын төзибез (рәс. 73).

x	1	2
y	3	3

Җавап: $x \approx 1{,}4$.

Тигезләмәләр системаларын график юл белән чишү

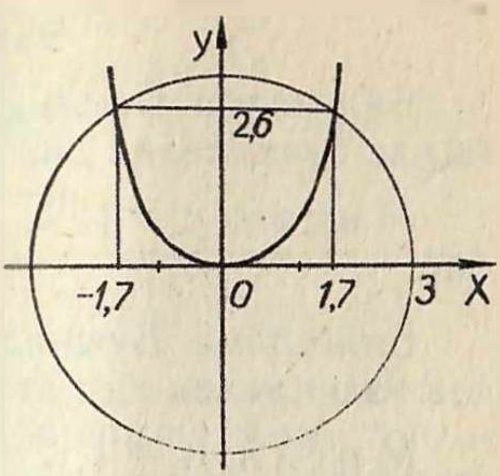
Тигезләмәләр системаларын график юл белән чишү тигезләмәне график юл белән чишүдән берни белән дә аерылмый. Ул әле гадирәк тә. Чөнки тигезләмәнең ике ягын да бер хәреф белән билгеләү кирәкми дә — ул инде шартта ук бирелгән. Ә менә җавапка x та һәм y та языла.

Кагыйдә. Тигезләмәләр системаларын график юл белән чишү өчен түбәндәгеләрне эшләргә кирәк:

1. *Бер үк сызымда ике графикны да сызарга.*

2. *Кисешү нокталары булса, җавапка аларның координаталарын язып куярга.*

Мисал. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = x^2 \end{cases}$ тигезләмәләр системасын график юл белән чишәргә.



Рәс. 74

Чишү. $x^2 + y^2 = 9$ графигын төзибез. Ул — үзәге координаталар башлангычында, ә радиусы 3 булган әйләнә.

$y = x^2$ графигын төзибез. Бу — парабола.

Кисешү нокталарының координаталарын табабыз:

Җавап: $x_1 \approx 1{,}7$, $y_1 \approx 2{,}6$, $x_2 \approx -1{,}7$ $y_2 \approx 2{,}6$.

28 нче зачет

1. Тигезләмәләрне график юл белән чишү кагыйдәсе.
2. Тигезләмәләр системасын график юл белән чишү кагыйдәсе.
3. $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{k}{x}$ $(k > 0)$, $y = \frac{k}{x}$ $(k < 0)$, $y = kx + b$, $x^2 + y^2 = R^2$ графикларын схематик рәвештә сыза белү.

28 нче контроль эш

1. $x^2 - 6x + 5 = \sqrt{x}$ тигезләмәсен график юл белән чишәргә.
2. Тигезләмәләр системасын график юл белән чишәргә:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = 2x - 1. \end{cases}$$

§ 29. ЭЗЛЕКЛЕЛЕКЛӘР

Билгеләмә. Саннар рәте **эзлеклелек** дип атала.

Мисаллар. $x_n = 10, 20, 30, 40, 50, 60.$

$$y_n = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}.$$

$$c_n = 0, 0, 0, 0, \ldots$$

Эзлеклелекләр хәрефләр белән билгеләнәләр, саннар эзлеклелекнең буыннары дип аталалар.

Һәрбер санның үз урыны бар, ягъни һәрбер санның, эзлеклелекнең башыннан башлап, ничәнче урында торганын күрсәтүче номеры бар.

Мисал. $x_n = 5, 10, 15, 20, 25, 30$ эзлеклелеге бирелгән. Аның 6 буыны бар: $x_1 = 5$, $x_2 = 10$, $x_3 = 15$, $x_4 = 20$, $x_5 = 25$, $x_6 = 30$.

Эзлеклелекләрнең төрләре

Билгеләмә. Буыннары санын белергә мөмкин булган эзлеклелек **чикле эзлеклелек** дип атала.

Мисал. $c_n = 1, 1, 1, 1, 1, 1$ эзлеклелеге чикле. Аның 6 буыны бар.

Билгеләмә. Буыннары саны чиксез күп булган эзлеклелек **чиксез эзлеклелек** дип атала.

Мисал. $a_n = 1, 2, 3, 4, 5, ...$эзлеклелеге чиксез. Натураль саннар рәтенең чиге юк.

Билгеләмә. Эзлеклелекнең һәр буыны үзеннән алда килгән буыннан зуррак булса, мондый эзлеклелек **үсә баручы** дип атала.

Мисал. $y_n = -7, -4, 0, 10, 20, 100$ эзлеклелеге — үсә баручы. Аның һәр буыны үзеннән алда килгән буыннан зуррак.

Билгеләмә. Эзлеклелекнең һәр буыны үзеннән алда килгән буыннан кечерәк булса, эзлеклелек **кими баручы** дип атала.

Мисал. $p_n = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...$ кими баручы эзлеклелек. Аның буыннары башыннан ук кими бара.

Үсә баручы һәм кими баручы эзлеклелекләрдән тыш гади эзлеклелекләр дә була.

Мисал. $x_n = 1, 10, 100, 96, 70, 71$ — үсә баручы да, кими баручы да түгел.

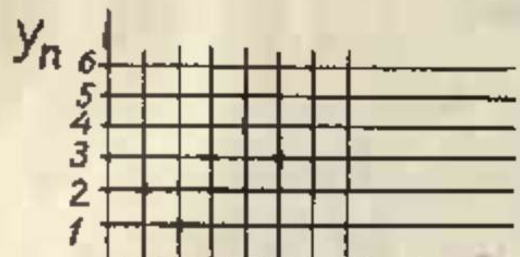
Эзлеклелекләрнең бирелү юллары

1. Эзлеклелек буыннарын санап чыгу юлы белән бирелергә мөмкин.

Мисал. $a_n = 5, 7, 9, 11, 13.$

2. Эзлеклелек график юл белән бирелергә мөмкин.

n күчәре горизонталь урнаша. n номер булганлыктан, ул бары тик бөтен сан гына була ала. y_n күчәре вертикаль урнаша.



Рәс. 75

Рәсемдә $y_n = 2, 1, 3, 4, 3$ эзлеклелеге бирелгән.

3. Эзлеклелек сүзләр ярдәмендә, ягъни аны төзү юлын сурәтләү ярдәмендә бирелә ала.

Мисал. c эзлеклелеге, 1 нчедән башлап 11 нче сыйныфка кадәр, һәр сыйныфтагы укучылар санын күрсәтүче саннардан тора.

4. Эзлеклелекне формула белән бирергә мөмкин.

Мисал. Эзлеклелек $y_n = 3n + 1$ формуласы белән бирелгән. Формула буенча аның теләсә кайсы буынын табарга мөмкин.

y_{10}, y_{100}, y_{250} буыннарын табыйк.

Чишү. $y_{10} = 3 \cdot 10 + 1 = 31$, 10 нчы урында 31 саны тора.

$y_{100} = 3 \cdot 100 + 1 = 301$, 100 нче урында 301 саны тора.
$y_{250} = 3 \cdot 250 + 1 = 751$, 250 нче урында 751 саны тора.

Мисал. Эзлеклелек $y_n = 0{,}25 \cdot 10^n$ формуласы белән бирелгән. Аның беренче өч буынын табыгыз.

Чишү.
$y_1 = 0{,}25 \cdot 10^1 = 0{,}25 \cdot 10 = 2{,}5.$
$y_2 = 0{,}25 \cdot 10^2 = 0{,}25 \cdot 100 = 25.$
$y_3 = 0{,}25 \cdot 10^3 = 0{,}25 \cdot 1000 = 250.$

Кире мәсьәлә. $y_n = 100 - 4n$ эзлеклелеге бирелгән. Аның буыннары арасында 20 һәм 45 саннары бармы? Булса, аларның номерларын табыгыз.

Чишү. Формулада y урынына 20 санын куйыйк. Тигезләмә табабыз:

$$20 = 100 - 4n$$
$$4n = 80$$
$$n = 20.$$

Эзлеклелекнең буыннары арасында 20 саны бар, һәм ул 20 нче урында тора.

Формулада y_n урынына 45 санын куйыйк. Тигезләмә табабыз:

$$45 = 100 - 4n$$
$$4n = 55$$
$$n = 13{,}75.$$

Ләкин n—номер һәм шуңа күрә вакланмалы сан була алмый, n бары тик бөтен сан гына була ала. Димәк, 45 саны эзлеклелек буыннары арасында була алмый.

5. Эзлеклелек рекуррент формула ярдәмендә бирелә ала.

Мисал. $c_n = 1, 3, 4, 7, 11, \ldots$ эзлеклелеге ничек төзелгән?

$c_3 = 4$, $1 + 3 = 4$ — өченче буын беренче ике буынны кушып табыла: $c_3 = c_1 + c_2$.

$c_4 = 7$, $3 + 4 = 7$, $c_4 = c_2 + c_3$, һәм гомумән, һәр буынны табу өчен, аңардан алда килүче ике буынны кушалар.

$c_{n+2} = c_n + c_{n+1}$ — бу эзлеклелекнең рекуррент формуласы.

Гадәти формула буенча теләсә кайсы буынны табарга мөмкин, ә рекуррент формула буенча, берәр буынны табу өчен, аннан алда килгән буынны белергә кирәк.

Мисал. Рекуррент формулалар белән бирелгән эзлеклелекнең 5 буынын табарга:

$$a_1 = 2,\ a_2 = 5,\ a_{n+2} = a_n \cdot a_{n+1}.$$

Чишү.
$a_3 = a_{1+2} = a_1 a_2 = 2 \cdot 5 = 10,$
$a_4 = a_{2+2} = a_2 a_3 = 5 \cdot 10 = 50,$
$a_5 = a_{3+2} = a_3 a_4 = 10 \cdot 50 = 500.$

29 нчы зачет

1. Нәрсә ул эзлеклелек?
2. Нинди эзлеклелек чикле дип атала?
3. Нинди эзлеклелек чиксез дип атала?
4. Нинди эзлеклелек үсә баручы дип атала?
5. Нинди эзлеклелек кими баручы дип атала?
6. Эзлеклелекне бирүнең 5 юлын санагыз.

29 нчы контроль эш

1. $b_n = 100 - 3n + n^3$ эзлеклелеге бирелгән. b_1, b_2, b_{10} ны табыгыз.

2. $c_n = 5_n + 8$ эзлеклелегенең буыннары арасында 124 һәм 118 саннары бармы? Булса, аларның номерларын табыгыз.

3. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 10 \cdot a_n - 1$ рекуррент формулалары белән бирелгән эзлеклелекнең беренче 6 буынын табыгыз.

§ 30. АРИФМЕТИК ПРОГРЕССИЯ

Барлык эзлеклелекләр арасыннан һәрбер буыны үзеннән алда килгән буыннан бер үк санга зуррак (кечкенәрәк) булып барган эзлеклелекләрне сайлап алыйк.

Мисал. $a_n = 2, 5, 8, 11, 14, 17$ ... Биредә $5 - 2 = 3$, $8 - 5 = 3$, $11 - 8 = 3$, $14 - 11 = 3$ икәнлеге, ягъни һәрбер буынны табу өчен алдагы буынга 3 не кушарга кирәклеге ачык.

Шулай итеп, a_6 ны табу өчен a_5 кә 3 не кушарга кирәк: $a_6 = 14 + 3 = 17$.

Икенче мисал. $b_n = 82, 72, 62, 52, \ldots$, $72 - 82 = -10$, $62 - 72 = -10$, $52 - 62 = -10$ икәне ачык күренә, ягъни һәрбер буынны табу өчен алдагы буыннан 10 ны алырга кирәк. Мәсәлән, b_5 не табу өчен b_4 тән 10 ны алырга кирәк: $b_5 = 52 - 10 = 42$.

Билгеләмә. Икенче буыныннан башлап һәрбер буыны, үзеннән алда килгән буын белән билгеле бер санның суммасына тигез булган эзлеклелек **арифметик прогрессия** дип атала. Бу сан **прогрессиянең аермасы** дип атала һәм d хәрефе белән билгеләнә.

Арифметик прогрессиянең формуласы: $a_{n+1} = a_n + d$.

Мисал. Эзлеклелекләр бирелгән: $a_n = 7, 12, 17, 22, \ldots$, $b_n = 100, 92, 84, 76, \ldots$, $c_n = 3, 7, 11, 16, \ldots$.

Бу эзлеклелекләрнең кайсылары арифметик прогрессия була?

Чишү. $a_n = 7, 12, 17, 22, \ldots$ $12 - 7 = 5$, $17 - 12 = 5$, $22 - 17 = 5$, a_n — арифметик прогрессия, $d = 5$.

$b_n = 100, 92, 84, 76, \ldots$ $92 - 100 = -8$, $84 - 92 = -8$, $76 - 84 = -8$, b_n — арифметик прогрессия, $d = -8$.

$c_n = 3, 7, 11, 16, \ldots$. $7 - 3 = 4$, $11 - 7 = 4$, ләкин $16 - 11 = 5$.

c_n — арифметик прогрессия түгел.

Арифметик прогрессиянең *n* нчы буыны формуласын чыгару

$a_{n+1} = a_n + d$ — рекуррент формула, ягъни аның буенча алдагы буынны белгәннән соң гына аннан соң килгән буынны табарга мөмкин. Беренче буын һәм аерма ярдәмендә теләсә кайсы буынны табу формуласын чыгарыйк. $a_1 = a_1$.

Икенче буынны табу өчен беренче буынга аерманы кушарга кирәк. $a_2 = a_1 + d$.

Өченче буынны табу өчен икенче буынга аерманы кушарга кирәк: $a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$.

Дүртенче буынны табу өчен өченче буынга аерманы кушарга кирәк: $a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$.

Күргәнебезчә, бишенче буынны табу өчен беренче буынга 4 аерманы кушарга кирәк: $a_5 = a_1 + 4d$.

Гомумән, теләсә кайсы буынны табу өчен, беренче буынга бу номердан бергә ким сандагы аерманы кушарга кирәк.

$$a_n = a_1 + d(n-1) \text{ — } n\text{-буын формуласы.}$$

Формуланың мәгънәсе бик гади. Беренче буыннан унынчы буынга кадәр 9 "адым", димәк, унынчы буынны табу өчен беренче буынга 9 аерманы кушарга кирәк.

Беренче буыннан 38 нче буынга 37 адым, димәк, 38 нче буынны табу өчен беренче буынга 37 аерманы кушарга кирәк.

Мисал. Арифметик прогрессия $a_n = 2 + 3(n-1)$ формуласы белән бирелгән. a_{10}, a_{20} һәм a_{128} не табарга.

Чишү. Бу прогрессиядә $a_1 = 2$, $d = 3$.

$$a_{10} = a_1 + 9d = 2 + 9 \cdot 3 = 2 + 27 = 29.$$
$$a_{20} = a_1 + 19d = 2 + 19 \cdot 3 = 2 + 57 = 59.$$
$$a_{128} = a_1 + 127d = 2 + 127 \cdot 3 = 2 + 381 = 383.$$

Мисал. Бирелгән: $a_1 = 5$, $d = -2$, a_n—арифметик прогрессия.

Табарга: a_{21} һәм a_{86}.

Чишү. *n* нчы буын формуласын языйк: $a_n = a_1 + d(n-1)$. Аңа саннарны куеп чишәбез:

$$a_{21} = 5 + (-2)(21 - 1)$$
$$a_{21} = 5 - 2 \cdot 20$$
$$a_{21} = 5 - 40, \quad a_{21} = -35.$$

Формуланы язабыз: $a_n = a_1 + d(n-1)$.
Аңа саннарны куеп чишәбез:

$$a_{86} = 5 + (-2) \cdot (86 - 1)$$
$$a_{86} = 5 - 2 \cdot 85$$
$$a_{86} = 5 - 170, \quad a_{86} = -165.$$

Мисал. Арифметик прогрессиядә $a_1 = 3$, $d = 8$. Бу прогрессия буыннары арасында 100 һәм 163 саннары бармы? Булса, аларның номерларын табыгыз.

Чишү. Формуланы язабыз: $a_n = a_1 + d(n-1)$.
Аңа саннарны куеп чишәбез:

$$100 = 3 + 8 \cdot (n-1)$$
$$100 = 3 + 8n - 8$$
$$100 = 8n - 5$$
$$105 = 8n$$
$$n = 13{,}125,$$

ягъни n — номер һәм ул вакланмалы сан була алмый, шуңа күрә 100 саны арифметик прогрессиянең буыны була алмый.

Формуланы язабыз: $a_n = a_1 + d(n-1)$.
Аңа саннарны куябыз:

$$163 = 3 + 8(n-1)$$
$$163 = 3 + 8n - 8$$
$$163 = 8n - 5$$
$$168 = 8n$$
$$n = 21.$$

Җавап: $a_{21} = 163$.

Прогрессиянең билгеле элементлары — a_n, a_1 һәм n буенча аерманы табу мәсьәләсе дә шулай ук башкарыла.

Арифметик прогрессиянең үзлеге

Теорема 4.1. ***Арифметик прогрессиянең икенче буыннан башлап һәр буыны үзе белән янәшә торган ике буынның арифметик уртасына тигез.***

Бирелгән:
a_n — арифметик прогрессия,
a_{n-1}, a_n, a_{n+1} — аның буыннары

Исбатларга:
$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

Исбатлау.

$a_{n-1} = a_1 + d(n-1-1) = a_1 + d(n-2)$.

$a_n = a_1 + d(n-1)$.

$a_{n+1} = a_1 + d(n-1+1) = a_1 + dn$.

Арифметик уртаны табабыз:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_1 + d(n-2) + a_1 + dn}{2} = \frac{a_1 + dn - 2d + a_1 + dn}{2}$$

$$\frac{2a_1 + 2dn - 2d}{2} = \frac{2(a_1 + dn - d)}{2} = a_1 + d(n-1) = a_n$$

буынын таптык, шуны исбатларга кирәк иде дә.

Мисал. $a_n = a_1, a_2, a_3, 25, a_5, 38, \ldots$ арифметик прогрессиясе бирелгән. a_5 не табарга.

Чишү. Бишенче буынның янәшә буыннары билгеле һәм 4.1 теоремасы буенча:

$$a_5 = \frac{a_4 + a_6}{2} = \frac{25 + 38}{2} = \frac{63}{2} = 31{,}5.$$

Җавап: $a_5 = 31{,}5$.

Арифметик прогрессиянең буыннары суммасы

Мисал. Беренче йөз натураль санның суммасын табыйк.

Чишү. Бу сумманы S дип билгеләп, аны ике тапкыр язабыз — башта үсә бару тәртибендә һәм аннан соң кимү тәртибендә:

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 \ldots + 98 + 99 + 100.$$
$$S = 100 + 99 + 98 \ldots + 3 + 2 + 1.$$

Берсе астына берсе язылган һәр ике парның суммасы 101 гә тигез.

$$1 + 100 = 101, \quad 2 + 99 = 101, \quad 3 + 98 = 101 \text{ һ. б.}$$

Мондый парлар саны — 100. Бу ике тигезләмәне буынлап кушсак:

$$2S = 100 \cdot 101, \text{ моннан } S = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050.$$

Теләсә нинди арифметик прогрессия өчен дә шулай ук фикер йөртергә мөмкин.

Арифметик прогрессиянең буыннары суммасы формуласын чыгару

Арифметик прогрессиянең n буыны суммасын S дип билгелик һәм бу сумманы ике тапкыр — башта үсә бару тәртибендә, аннан соң кими бару тәртибендә язабыз:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n,$$
$$S = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \ldots + a_4 + a_3 + a_2 + a_1.$$

Берсе астына берсе язылган һәр парның суммасы $a_1 + a_n$ га тигез. Чынлап та,

1 нче пар: $a_1 + a_n$.
2 нче пар: $a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n$.
3 нче пар: $a_3 + a_{n-2} = (a_1 + 2d) + (a_n - 2d) = a_1 + a_n$ һ. б. ш.

Мондый парлар саны n га тигез. Шуңа күрә, бу ике тигезлекне кушабыз: $2S_n = (a_1 + a_n)n$, моннан

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \text{ килеп чыга.}$$

Арифметик прогрессиянең n буыны суммасын табу өчен, беренче буынга соңгы буынны кушарга, аны буыннар санына тапкырларга һәм тапкырчыгышны 2 гә бүләргә кирәк.

Арифметик прогрессиянең буыннары суммасы формуласының икенче төре

Бу формулада a_n урынына $a_1 + d(n-1)$ аңлатмасын куйыйк:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(a_1 + a_1 + d\cdot(n-1))n}{2} = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n$$

Шулай итеп, $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n.$

Мисал. Арифметик прогрессиядә $a_1 = 3$ һәм $d = 0{,}2$. Аның беренче 20 буыны суммасын табыгыз.

Чишү. Буыннар суммасының икенче формуласын язабыз:

$$S_n = \frac{2a + d(n-1)}{2}\cdot n.$$

Аңа саннарны куябыз: $S_{20} = \dfrac{2\cdot 3 + 0{,}2(20-1)}{2}\cdot 20$

$$S_{20} = \frac{6 + 0{,}2\cdot 19}{2}\cdot 20$$
$$S_{20} = (6 + 3{,}8)\cdot 10$$
$$S_{20} = 9{,}8\cdot 10.$$

Җавап: $S_{20} = 98.$

Мисал. Бирелгән: $a_{10} = 50$, $a_{20} = 10 \cdot S_{30}$ ны табарга.

Чишү. Сумманы табу өчен беренче буынны һәм аерманы табарга кирәк.

Тигезләмәләр системасын төзибез:

$$\begin{cases} a_{20} = a_1 + 19d, \\ a_{10} = a_1 + 9d. \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 + 19d = 10, \\ a_1 + 9d = 50. \end{cases}$$

Бу системаны кушу юлы белән чишәбез. Системаның беренче тигезләмәсеннән икенчесен алабыз:

$$a_1 - a_1 + 19d - 9d = 10 - 50.$$
$$10d = -40$$
$$d = -4.$$

a_1 не табабыз:

$$a_1 + 9d = 50$$
$$a_1 + 9(-4) = 50$$
$$a_1 = 86.$$

a_{30} ны табабыз:

$$a_{30} = a_1 + 29d = 86 + 29(-4) = 86 - 116 = -30.$$

Сумманың беренче формуласы буенча:

$$S_{30} = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = (86 - 30) \cdot 15 = 840.$$

Җавап: $S_{30} = 840$.

30 нчы зачет

1. Арифметик прогрессиянең билгеләмәсе.
2. Арифметик прогрессиянең n нчы буыны формуласын языгыз.
3. 4.1 теоремасы ничек укыла?
4. Арифметик прогрессиянең буыннары суммасын табуның ике формуласын языгыз.

"4" һәм "5" ле өчен өстәмә рәвештә:

1. Арифметик прогрессиянең n нчы буыны формуласын чыгарыгыз.
2. 4.1 теоремасын исбатлагыз.
3. Арифметик прогрессия буыннары суммасын табуның ике формуласын да чыгарыгыз.

30 нчы контроль эш

1. Әгәр $a_1 = -20$ һәм $d = 1,6$ булса, арифметик прогрессиянең 37 нче буынын табыгыз.
2. $c_n = 3, -7, -27$ арифметик прогрессиясенең буыны булып (-237) саны тора аламы? Әгәр алса, аның номерын табыгыз.
3. Әгәр $b_1 = 10$ һәм $d = -6$ булса, b_n арифметик прогрессиянең беренче 18 буыны суммасын табыгыз.

§ 31. ГЕОМЕТРИК ПРОГРЕССИЯ

Барлык эзлеклелекләр арасыннан һәрбер буыны үзеннән алда килгән буыннан бер үк тапкыр зуррак (кечерәк) булган эзлеклелекләрне сайлап алыйк.

Мисал. $a_n = 2, 6, 18, 54, \ldots$.

$6 : 2 = 3$, $18 : 6 = 3$, $54 : 18 = 3$, ягъни берәр буынны табу өчен аннан алда килгән буынны 3 кә тапкырларга кирәк. Шулай итеп, 5 нче урында $a_5 = 54 \cdot 3 = 162$ саны торачак.

Мисал. $b_n = 10\,000, 1000, 100, 10, \ldots$. Күргәнебезчә, $1000 : 10\,000 = 0,1$; $100 : 1000 = 0,1$; $10 : 100 = 0,1$, димәк, һәр буын үзеннән алдагы буынны 0,1 гә тапкырлап табыла: $b_5 = 10 \cdot 0,1 = 1$.

Билгеләмә. Икенче буыннан башлап һәр буыны, үзеннән алда килгән буынны бер үк санга тапкырлап табылган эзлеклелек **геометрик прогрессия** дип атала.

Бу сан геометрик прогрессиянең тапкырлыгы дип атала һәм q хәрефе белән билгеләнә.

Геометрик прогрессиянең формуласы: $a_{n+1} = a_n q$.

Мисал. Эзлеклелекләр бирелгән:

$$a_n = 2, 4, 8, 16, \ldots$$
$$b_n = 3, 12, 36, 64, \ldots$$

Кайсы эзлеклелек геометрик прогрессия булыр? Әгәр эзлеклелек геометрик прогрессия булса, аның тапкырлыгын табыгыз.

Чишү. $a_n = 2, 4, 8, 16, \ldots$ $4 : 2 = 2$, $8 : 4 = 2$, $16 : 8 = 2$. a_n — геометрик прогрессия һәм аның тапкырлыгы 2 гә тигез. $b_n = 3, 12, 36, 64, \ldots$ $12 : 3 = 4$, ләкин $36 : 12 = 3$, b_n — геометрик прогрессия түгел.

$a_{n+1} = a_n q$ — рекуррент формула, ягъни аның буенча моннан алдагы буынны белгәннән соң гына киләсе буынны исәпләргә мөмкин. Беренче буын һәм тапкырлык билгеле булганда, теләсә кайсы буынны табу формуласын чыгарыйк.

Геометрик прогрессиянең n нчы буыны формуласын чыгару

2-буынны табу өчен 1-буынны тапкырлыкка тапкырлыйлар: $a_1 = a_1$.
$a_2 = a_1 q^1$

3-буынны табу өчен 2-буынны тапкырлыкка тапкырлыйлар: $a_3 = a_2 q = a_1 q^2$

4-буынны табу өчен 3-буынны тапкырлыкка тапкырлыйлар: $a_4 = a_3 q = a_1 q^2 q^1 = a_1 q^3$.

Күргәнебезчә, 5-буынны табу өчен беренче буынны тапкырлыкның 4 нче дәрәҗәсенә тапкырларга кирәк: $a_5 = a_1 q^4$.

Һәм, гомумән, теләсә кайсы буынны табу өчен беренче буынны тапкырлыкның кирәкле номерының берәмлеккә киметелгән дәрәҗәсенә тапкырлыйлар.

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Мисал. Геометрик прогрессия $a_n = 3 \cdot 2$ формуласы белән бирелгән. a_3, a_5, a_7 не табарга.

Чишү. Бу прогрессиядә $a_1 = 3$ һәм $q = 2$.

$$a_3 = a_1 q^2 = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12,$$
$$a_5 = a_1 q^4 = 3 \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48.$$
$$a_7 = a_1 q^6 = 3 \cdot 2^6 = 3 \cdot 64 = 192.$$

Мисал. Геометрик прогрессиядә $a_1 = 10$, $q = -2$. a_5 һәм a_8 не табарга.

Чишү. $a_5 = 10 \cdot (-2)^{5-1}$ $\qquad a_8 = 10 \cdot (-2)^{8-1}$
$a_5 = 10 \cdot 16$ $\qquad a_8 = 10 \cdot (-128)$
$a_5 = 160.$ $\qquad a_8 = -1280.$

Мисал. Геометрик прогрессиядә $a_1 = 500$, $q = 0{,}2$. Бу прогрессиянең буыннары арасында 0,8 һәм 200 саннары бармы? Булса, аларның номерларын табыгыз.

Чишү. Формуланы язабыз: $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Аңа саннарны куеп чишәбез:

$$0{,}8 = 500 \cdot 0{,}2^{n-1} \qquad 0{,}2^{n-1} = 0{,}2^4$$
$$0{,}2^{n-1} = 0{,}8 : 500 \qquad n - 1 = 4$$
$$0{,}2^{n-1} = 0{,}0016 \qquad n = 5.$$

$$0{,}0016 = 0{,}2^4$$

Геометрик прогрессия буыннары арасында 0,8 саны бар, аның номеры 5 кә тигез.

Формуланы язабыз: $a_n = a_1 q^{n-1}$

Саннарны куябыз: $200 = 500 \cdot 0{,}2^{n-1}$

$$0{,}2^{n-1} = 200 : 500 \qquad 0{,}2^{n-1} = 0{,}4.$$

0,4 саны 0,2 нең дәрәҗәсе түгел, шуңа күрә 200 — бу геометрик прогрессиянең буыны түгел.

Мисал. $a_5 = 0{,}004$ һәм $q = 0{,}1$ булган геометрик прогрессиянең беренче буынын табарга.

Чишү. Формуланы язабыз: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Аңа саннарны куеп чишәбез: $0{,}004 = a_1 \cdot 0{,}1^{5-1}$

$$0{,}004 = a_1 \cdot 0{,}0001 \qquad a_1 = 0{,}004 : 0{,}0001.$$

Җавап: $a_1 = 40$.

Мисал. $a_1 = 2$ һәм $a_5 = 162$ булган геометрик прогрессиянең тапкырлыгын табыгыз.

Чишү. Формуланы язабыз: $a_n = a_1 q^{n-1}$

Саннарны куябыз: $162 = 2 \cdot q^{5-1}$

$$162 = 2 \cdot q^4 \qquad q^4 = 162 : 2 \qquad q^4 = 81$$
$$q = 3 \text{ яки } q = -3,$$

чөнки $3^4 = 81$ һәм $(-3)^4 = 81$. Шуңа күрә андый прогрессияләр икәү.

Җавап: 2, 6, 18, 54, 162 ...
2, −6, 18, −54, 162 ... .

Геометрик прогрессиянең үзлеге

Теорема 5.1. ***Геометрик прогрессиянең икенче буыныннан башлап һәр буыны үзенең янындагы ике буын тапкырчыгышыннан квадрат тамырга тигез.***

Бирелгән:	Исбатлау.
a_n — геометрик прогрессия a_{n-1}, a_n, a_{n+1} — аның буыннары.	$a_{n-1} = a_1 q^{n-1-1} = a_1 q^{n-2}$, $a_n = a_1 q^{n-1}$, $a_{n+1} = a_1 q^n \cdot a_{n-1}$ һәм a_{n+1} буыннары тапкырчыгышыннан квадрат тамыр алыйк.
Исбатларга: $a_n = \sqrt{a_{n-1} a_{n+1}}$	$\sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} = \sqrt{a_1 q^{n-2} \cdot a_1 q^n} = \sqrt{a_1^2 q^{n-2+n}} =$

$= \sqrt{a_1^2 q^{2n-2}} = \sqrt{a_1^2 q^{2(n-1)}} = a_1 q^{n-1}$ — бу a_n буынына тигез. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

Мисал. a_1, a_2, a_3, 40, a_5, 160 ... геометрик прогрессиясендә a_5 не табарга.

Чишү. a_5 буынының күрше буыннары билгеле, 5.1 теоремасын кулланабыз.

$$a_5 = \sqrt{a_4 a_6} = \sqrt{40 \cdot 160} = \sqrt{6400} = 80.$$

Җавап: $a_5 = 80$.

Геометрик прогрессия буыннары суммасын табу формуласын чыгару

$a_n = b_1, b_2, \dots b_n$ геометрик прогрессиясе бирелгән булсын. Аның n буыны суммасын S_n дип билгелик.

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1} + b_n.$$

Тигезләмәнең ике ягын да q га тапкырлыйк.

$$S_n q = b_1 q + b_2 q + b_3 q + \dots + b_{n-1} q + b_n q,$$

ләкин $b_1 q = b_2$, $b_2 q = b_3$, ... $b_{n-1} q = b_n$.

Шуңа күрә, тапкырлап табылган тигезлекне икенче төрле язарга мөмкин:

$$S_n q = b_2 + b_3 + \dots + b_n + b_n q$$
$$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n$$

Беренче тигезлектән икенчесен буынлап алабыз:

$$b_2 - b_2 = 0,\ b_3 - b_3 = 0,\ \dots\ b_{n-1} - b_{n-1} = 0,\ b_n - b_n = 0.$$

$S_n q - S_n = b_n q - b_1$ генә калды. Аны үзгәртәбез: $S_n(q-1) = b_n q - b_1$, моннан S_n ны табабыз:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1},$$

бу — геометрик прогрессиянең n нчы буыны суммасын табу формуласы.

Геометрик прогрессиянең n буыны суммасы формуласының икенче төре

Сумма формуласына b_n урынына аның кыйммәтен — $b_n = b_1 q^{n-1}$ сен куйыйк.

Табабыз: $S_n = \dfrac{b_1 q^{n-1} \cdot q - b_1}{q-1} = \dfrac{b_1 q^n - b_1}{q-1} = \dfrac{b_1 (q^n - 1)}{q-1}$.

Шулай итеп, $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$.

Мисал. $b_1 = 3$ һәм $q = \frac{1}{2}$ булган геометрик прогрессиянең беренче 10 буыны суммасын табыгыз.

Чишү. Беренче буын белән тапкырлык билгеле булганлыктан, икенче формуланы кулланабыз.

Формуланы язабыз: $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$.

Аңа саннар куеп чишәбез: $S_{10} = \frac{3\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{3\left(\frac{1}{1024} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} =$

$$= 3\left(-\frac{1023}{1024}\right) : \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3 \cdot 1023 \cdot 2}{1024} = \frac{3069}{512} = 5\frac{509}{512}.$$

Мисал. $x \neq 1$ булганда $1 + x + x^2 + x^3 + \dots x^{n-1}$ нең суммасын табыгыз.

Чишү. Бу — тапкырлыгы $x : 1 = x$ булган геометрик прогрессия суммасы, беренче буын 1 гә, соңгы буын x^{n-1} гә тигез. Сумманың беренче формуласын кулланабыз.

Формуланы язабыз: $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}$.

Саннар һәм аңлатмаларны куеп исәплибез: $S_n = \frac{x^{n-1} \cdot x - 1}{x-1} = \frac{x^n - 1}{x-1}$.

Мисал. $b_1 = 1000$, $b_6 = 0{,}32$ һәм $S_6 = 1249{,}92$ булган геометрик прогрессиянең тапкырлыгын табарга.

Чишү. Формуланы язабыз: $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}$.

Саннарны куябыз: ${}^{q-1}/1249{,}92 = \frac{0{,}32 \cdot q - 1000}{q-1}$. Уртак ваклаучыга китерәбез: $1249{,}92q - 1249{,}92 = 0{,}32q - 1000$, $1249{,}6q = 249{,}92$, $q = 0{,}2$.

Җавап: $q = 0{,}2$.

Мисал. $S_n = -430$ һәм $q = -2$ булган геометрик прогрессиянең беренче буынын табыгыз.

Чишү. Сумманың икенче формуласын кулланабыз.

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}.$$

Аңа саннар куеп чишәбез:

$$-430 = \frac{b_1\left((-2)^7 - 1\right)}{-2 - 1}$$

$$-430 = \frac{b_1(-128 - 1)}{-3}$$

$$-430 = \frac{b_1 \cdot (-129)}{-3}$$

$$-430 = 43b_1$$

$b_1 = -10.$ Җавап: $b_1 = -10.$

31нче зачет

1. Геометрик прогрессиянең билгеләмәсе.
2. Геометрик прогрессиянең n нчы буыны формуласын языгыз.
3. 5.1 теоремасы ничек укыла?
4. Геометрик прогрессиянең n нчы буыны суммасы формуласын языгыз.

"4" һәм "5" ле өчен өстәмә:

1. Геометрик прогрессиянең n нчы буыны формуласын чыгарырга.
2. 5.2 теоремасын исбатларга.
3. Геометрик прогрессиянең буыннары суммасын табуның ике формуласын да чыгарырга.

31 нче контроль эш

1. $b_1 = 8$ һәм $q = 0{,}4$ булган геометрик прогрессиянең бишенче буынын табыгыз.

2. Геометрик прогрессиядә $a_5 = 2{,}368$ һәм $q = \frac{2}{5}$. Аның беренче буынын һәм беренче биш буынының суммасын табыгыз.

§ 32. РАЦИОНАЛЬ КҮРСӘТКЕЧЛЕ ДӘРӘҖӘ

Кайбер билгеләмәләр һәм кагыйдәләрне кабатлыйк.

Билгеләмә. Һәрберсе a га тигез булган n санның тапкырчыгышы a **санының** n **күрсәткечле дәрәҗәсе** дип атала.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n \text{ тапкыр}}$$

Билгеләмә. Санаучысы берәмлеккә, ә ваклаучысы уңай күрсәткечле шул ук дәрәҗәгә тигез булган вакланма **санның тискәре күрсәткечле дәрәҗәсе** дип атала.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Билгеләмә. Нульдән башка теләсә нинди санның нуленче дәрәҗәсе **берәмлеккә** тигез.

$$a^0 = 1,\ a \neq 0.$$

Билгеләмә. Квадраты a га тигез булган сан a саныннан **квадрат тамыр** дип атала.

$$\sqrt{a} = b,\ b^2 = a.$$

1. Нигезләре бертөрле булган дәрәҗәләрне тапкырлау өчен, нигезне шул ук калдырып, дәрәҗә күрсәткечләрен кушарга кирәк.

$$a^n \cdot a^p = a^{n+p}.$$

2. Нигезләре бертөрле булган дәрәҗәләрне бүлү өчен, нигезне шул ук калдырып, беренче күрсәткечтән икенчесен алырга кирәк.

$$a^n : a^p = a^{n-p}.$$

3. Дәрәҗәне дәрәҗәгә күтәрү өчен, нигезне үзгәрешсез калдырып, күрсәткечләрне тапкырларга кирәк.

$$(a^n)^p = a^{np}.$$

4. Тапкырчыгышны дәрәҗәгә күтәрү өчен һәрбер тапкырлаучыны бу дәрәҗәгә күтәрергә кирәк.

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n.$$

5. Вакланманы дәрәҗәгә күтәрү өчен санаучыны да, ваклаучыны да шушы ук дәрәҗәгә күтәрергә кирәк.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

n нчы дәрәҗә тамыр

Билгеләмә. n нчы дәрәҗәсе a санына тигез булган сан **a саныннан n нчы дәрәҗә тамыр** дип атала.

$$\text{Әгәр } (b)^n = a \text{ булса, } \sqrt[n]{a} = b.$$

Мисаллар. $\sqrt[3]{1000} = 10$, чөнки $10^3 = 1000$.

$\sqrt[10]{1024} = 2$, чөнки $2^{10} = 1024$.

$\sqrt[4]{x^{20}} = x^5$, чөнки $(x^5)^4 = x^{20}$.

$\sqrt[3]{-125} = -5$, чөнки $(-5)^3 = -125$.

Күргәнебезчә, так дәрәҗәдәге тамырларны теләсә нинди саннан да алырга мөмкин, ә җөп дәрәҗәдәге тамырларны бары тик уңай саннан гына алып була.

$\sqrt[4]{-16}$ була алмый, чөнки 4 нче дәрәҗәсе (-16) га тигез булган сан була алмый. Шуңа күрә, теләсә нинди санның җөп дәрәҗәсеннән җөп тамыр — бары тик тискәре булмаган сан гына дип әйтә алабыз.

$$\sqrt[2p]{a^{2p}} = |a|.$$

Мисаллар. $\left(\sqrt[8]{4,5}\right)^8 = 4,5, \quad \left(\sqrt[7]{0,67}\right)^7 = 0,67, \quad \left(\sqrt[n]{6}\right)^n = 6.$

Тамырларның төп үзлеге

Дәрәҗәнең дә, тамырның да күрсәткечләрен бер үк санга тапкырлаудан тамырның кыйммәте үзгәрми.

$$\sqrt[k]{a^n} = \sqrt[pk]{a^{pn}}.$$

Исбатлау. Исбатланырга тиешле тигезлекнең ике ягын да pk дәрәҗәсенә күтәрәбез.

$$\left(\sqrt[k]{a^n}\right)^{pk} = a^{pn}, \qquad \left(\sqrt[pk]{a^{pn}}\right)^{pk} = a^{pn}.$$

Тигезлекләрнең уң яклары үзара тигезләр, димәк, сул яклары да тигез булырга тиеш, ягъни

$\sqrt[k]{a^n} = \sqrt[pk]{a^{pn}}$ — шуны исбатларга кирәк иде дә.

Мисал. Чагыштырырга: $\sqrt[4]{100}$ һәм $\sqrt[8]{200}$.

Чишү. Төрле нигезле дәрәҗәләрне чагыштырып булмый. Тамыр күрсәткечләре бертөрле булсын өчен, беренче аңлатманың тамыр күрсәткечен дә, тамырасты аңлатмасының дәрәҗә күрсәткечен дә 2 гә тапкырлыйбыз:

$$\sqrt[4]{100} = \sqrt[8]{100^2} = \sqrt[8]{10000}.$$

10 000 саны 200 дән зуррак булганлыктан,

$$\sqrt[4]{100} > \sqrt[8]{200}.$$

Мисал. Чагыштырырга: $\sqrt[4]{3}$ һәм $\sqrt[3]{4}$.

Чишү. Тамыр күрсәткечләрен тигезлибез. Моның өчен, беренче тамыр һәм дәрәҗә күрсәткечләрен 3 кә тапкырлыйбыз:

$$\sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{27}.$$

Икенче тамыр һәм дәрәҗә күрсәткечләрен 4 кә тапкырлыйбыз:

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{256}.$$

Икенче тамырның зуррак икәнлеге ачык.

Мисал. Тапкырларга: $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{10}$.

Чишү. Тамыр күрсәткечләрен тигезлибез. Беренче күрсәткечләрне 2 гә тапкырлыйбыз: $\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$.

Хәзер тапкырлыйбыз:

$$\sqrt[6]{25}\cdot\sqrt[6]{10} = \sqrt[6]{25\cdot 10} = \sqrt[6]{250}.$$

Мисал. Гадиләштерергә: $\sqrt[3]{\sqrt[4]{10}}$.

Чишү: $\sqrt[3]{\sqrt[4]{10}} = \sqrt[12]{10}$.

Кагыйдә. ***Тамырдан тамыр алу өчен тамыр күрсәткечләрен тапкырларга кирәк.***

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}.$$

Исбатлау төп үзлекне исбатлауга охшаган.

Мисал. Гадиләштерергә: $\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$.

Чишү. Беренче x ны эчке тамыр тамгасы астына кертәбез:

$$\sqrt[3]{x\sqrt{x}} = \sqrt[3]{\sqrt{x^2\cdot x}} = \sqrt[3]{\sqrt{x^3}} = \sqrt[3\cdot 2]{x^3} = \sqrt[6]{x^3} = \sqrt{x}.$$

Ике күрсәткечне дә 2 гә бүлдек.

Мисал. Тапкырлаучыны тамыр тамгасы астыннан чыгарырга:

$$\sqrt{9x} = 3\sqrt{x},\quad \sqrt[3]{27a} = 3\sqrt[3]{a},$$

$$\sqrt[4]{625x^9} = \sqrt[4]{625x^8\cdot x} = 5x^2\sqrt[4]{x}.$$

Билгеләмә. a санының p дәрәҗәсеннән n нчы дәрәҗә тамырга a санынннан $\frac{p}{n}$ **рациональ күрсәткечле дәрәҗәсе** дип әйтәләр.

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}.$$

Мисал. Дәрәҗә рәвешендә язарга: $\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[4]{x^7} = x^{\frac{7}{4}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{c}} = \frac{1}{c^{\frac{1}{3}}} = c^{-\frac{1}{3}}$.

Мисал. Тамыр рәвешендә язарга: $x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$, $10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10}$, $10^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$, $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, $c^{0,2} = c^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{c}$.

Мисал. Исәпләргә: $1000^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1000} = 10, \quad 121^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{121}} = \frac{1}{11}$

$$8^{2\frac{1}{3}} = 8^{\frac{7}{3}} = \sqrt[3]{8^7} = \sqrt[3]{\left(2^3\right)^7} = \sqrt[3]{2^{21}} = 2^7 = 128,$$

$$0{,}0016^{-1\frac{1}{4}} = \frac{1}{0{,}0016^{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{0{,}0016^5}} = \frac{1}{\sqrt[4]{\left((0{,}2)^4\right)^5}} = \frac{1}{\sqrt[4]{0{,}2^{20}}} = \frac{1}{0{,}2^5} =$$

$$= 1 : 0{,}2^5 = 1 : 0{,}00032 = 312{,}5.$$

Рациональ күрсәткечле дәрәҗәләр өчен дәрәҗәләр өстендәг гамәл кагыйдәләре дә дөрес.

Мисал. Тапкырлауны эшләгез:

$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}$, чөнки $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$.

$c^{-\frac{1}{2}} \cdot c^{-\frac{1}{6}} = c^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{c^2}}$, чөнки $-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{-3-1}{6} = -\frac{2}{3}$.

Мисал. Бүлүне эшләгез:

$$a^{\frac{3}{4}} : a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{a}, \text{ чөнки } \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9-8}{12} = \frac{1}{12}.$$

$$b^{-\frac{2}{5}} : b^{\frac{1}{10}} = b^{-\frac{5}{10}} = b^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}; \text{ чөнки } -\frac{2}{5} - \frac{1}{10} = \frac{-4-1}{10} = -\frac{1}{2}.$$

Мисал. Дәрәҗәне дәрәҗәгә күтәрергә:

$$\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^5 = a^{\frac{10}{3}}, \quad \left(c^{-\frac{1}{4}}\right)^{\frac{4}{5}} = c^{-\frac{4}{20}} = c^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{c}}, \quad \left(x^{-\frac{5}{6}}\right)^0 = 1.$$

Мисал. Исәпләргә: $-0{,}2^3 \cdot 0{,}2^{-2} + 64^{\frac{1}{6}} - 5^3 : 5 + 6{,}5^0 = -22{,}2$.

1) $-0{,}2^3 \cdot 0{,}2^{-2} = -0{,}2^1 = -0{,}2$, чөнки $3 + (-2) = 3 - 2 = 1$.

2) $64^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64} = 2$, чөнки $2^6 = 64$.
3) $5^3 : 5 = 5^2 = 25$,
4) $6{,}5^0 = 1$,
5) $-0{,}2 + 2 - 25 + 1 = 3 - 25{,}2 = -22{,}5$.

Мисал. Аңлатманы гадиләштерергә: $\left(125x^{-6}\right)^{-\frac{2}{3}}$

Чишү. Һәр тапкырлаучыны дәрәҗәгә күтәрәбез:

$$\left(125x^{-6}\right)^{-\frac{2}{3}} = 125^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(x^{-6}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{125^{\frac{2}{3}}} \cdot x^{\frac{12}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125^2}} \cdot x^4 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{\left(5^3\right)^2}}\,x^4 = \frac{1}{25}\,x^4.$$

М и с а л. Гадиләштерергә: $\dfrac{y\sqrt[10]{y\sqrt[3]{y^2}}}{y^{\frac{5}{6}}}$

Ч и ш ү. $\dfrac{y\sqrt[10]{y\sqrt[3]{y^2}}}{y^{\frac{5}{6}}} = \dfrac{y\cdot y^{\frac{1}{10}}\cdot y^{\frac{2}{30}}}{y^{\frac{5}{6}}} = y\cdot y^{\frac{1}{10}}\cdot y^{\frac{1}{15}}\cdot y^{-\frac{5}{6}} = \sqrt[3]{y}.$

Чөнки $^{30}/1 + \frac{{}^{3}/1}{10} + \frac{{}^{2}/1}{15} - \frac{{}^{5}/5}{6} = \frac{30+3+2-25}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$

М и с а л. Вакланманы кыскартырга: $\dfrac{a+a^{0.5}}{1+a^{0.5}}$

Ч и ш ү. a аңлатмасын $a^1=a^{0,5}\cdot a^{0,5}$ дип язарга мөмкин, чөнки $0,5+0,5=1$. Санаучыда $a^{0,5}$ тапкырлаучысын җәя тышына чыгарабыз:

$$\frac{a+a^{0.5}}{1+a^{0.5}} = \frac{a^{0.5}\cdot\left(a^{0.5}+1\right)}{1+a^{0.5}} = a^{0.5} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}.$$

М и с а л. Вакланманы кыскартырга: $\dfrac{1-x}{1-x^{0.5}}$.

Ч и ш ү. $(1-x)$ аңлатмасын квадратлар аермасы формуласы буенча таркатабыз:

$$\frac{1-x}{1-x^{0,5}} = \frac{\left(1+x^{0,5}\right)\left(1-x^{0,5}\right)}{1-x^{0,5}} = 1+x^{0,5}$$

М и с а л. $\dfrac{10p^{0.5}}{n-p} + \dfrac{5}{n^{0.5}+p^{0.5}}$ аңлатмасын гадиләштерергә, $n=\frac{4}{9}$ һәм $p=\frac{16}{81}$ булганда, кыйммәтен исәпләргә. $n-p$ аңлатмасын квадратлар аермасы формуласы буенча таркатабыз һәм кушуны эшлибез:

$$\frac{10p^{0,5}}{\left(n^{0,5}-p^{0,5}\right)\left(n^{0,5}+p^{0,5}\right)} + \frac{{}^{n^{0,5}-p^{0,5}}/5}{n^{0,5}+p^{0,5}} = \frac{10p^{0,5}+5n^{0,5}-5p^{0,5}}{\left(n^{0,5}-p^{0,5}\right)\left(n^{0,5}+p^{0,5}\right)} =$$

$$= \frac{5p^{0,5}+5n^{0,5}}{\left(n^{0,5}-p^{0,5}\right)\left(n^{0,5}+p^{0,5}\right)} = \frac{5\left(p^{0,5}+n^{0,5}\right)}{\left(n^{0,5}-p^{0,5}\right)\left(n^{0,5}+p^{0,5}\right)} = \frac{5}{n^{0,5}-p^{0,5}} =$$

$$= \frac{5}{\left(\frac{4}{9}\right)^{0,5}-\left(\frac{16}{81}\right)^{0,5}} = 22,5.$$

1) $\left(\frac{4}{9}\right)^{0,5} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, 3) $\frac{3/2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{6-4}{9} = \frac{2}{9}$,

2) $\left(\frac{16}{81}\right)^{0,5} = \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{16}{81}} = \frac{4}{9}$, 4) $5 : \frac{2}{9} = \frac{45}{2} = 22,5$.

32 нче зачет

1. Нәрсә ул дәрәҗә?
2. Дәрәҗәләрне тапкырлау кагыйдәсе.
3. Дәрәҗәләрне бүлү кагыйдәсе.
4. Дәрәҗәне дәрәҗәгә күтәрү кагыйдәсе.
5. Тискәре күрсәткечле дәрәҗә нәрсә ул?
6. Санның нуленче дәрәҗәсе нәрсәгә тигез?
7. a саныннан квадрат тамыр дип нәрсәне атыйлар?
8. a саныннан n нчы дәрәҗә тамыр дип нәрсәне атыйлар?
9. Тамырларның төп үзлеге ничек әйтелә?
10. Тамырдан тамыр алу кагыйдәсе.
11. a санының $\frac{p}{n}$ дәрәҗәсе нәрсә ул?

32 нче контроль эш

1. Аңлатманы гадиләштерергә: $\left(128x^{-7}\right)^{-\frac{1}{7}}$.
2. Исәпләргә: $6^2 \cdot 6^{-1} + 0,56^0 - 3^3 \cdot 3^{-1} + 27^{-\frac{2}{3}}$.
3. Гадиләштерергә: $(2 - y^{0,5})^2 + 4y^{0,5}$.
4. Вакланманы кыскартырга: $\frac{x-25}{x-5x^{0,5}}$.

§ 33. ТИГЕЗЛӘМӘЛӘР СИСТЕМАЛАРЫ ҺӘМ МӘСЬӘЛӘЛӘР ЧИШҮ

Алыштырып кую юлы

Мисал. Тигезләмәләр системасын чишәргә: $\begin{cases} x^2 + xy = 3 \\ 3x + y = 5. \end{cases}$

Чишү. Икенче тигезләмәдә y ны табабыз: $y = 5 - 3x$. Бу аңлатманы беренче тигезләмәдәге y урынына куябыз:

$x^2 + xy = 3,$
$x^2 + x \cdot (5 - 3x) = 3,$
$x^2 + 5x - 3x^2 = 3,$
$-2x^2 + 5x - 3 = 0,$ $D = 5^2 - 4(-2) \cdot (-3) = 25 - 24 = 1$

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm 1}{2\cdot(-2)},\quad x_1=1,\quad x_2=\frac{3}{2}=1,5.$$

y ны табабыз. Моның өчен $y=5-3x$ аңлатмасында x урынына кыйммәтләрен куябыз:

$$y_1=5-3\cdot 1=5-3=2,\quad y_2=5-3\cdot 1,5=5-4,5=0,5.$$

Җавап: $x_1=1,\quad y_1=2.$
$x_2=1,5,\quad y_2=0,5.$

Кайсы аңлатманы алыштырып куярга кирәклеге һәр системада үзенчә хәл ителә. Дәрәҗә күрсәткече дә һәм алдындагы коэффициенты да берәмлеккә тигез булган билгесезне сайлап алу уңайрак. Беренче дәрәҗәдән югарырак тигезләмәләр системаларын чишү өчен гомуми кагыйдәләр юк.

Яңа билгесез кертү юлы

Тигезләмәләр системасына кергән кайбер аңлатмаларны яңа билгесез белән алыштырып куеп, яңа, җиңелрәк система табарга мөмкин.

Мисал. $\begin{cases}x+xy+y=11\\x-2xy+y=-7\end{cases}$ тигезләмәләр системасын чишәргә.

Чишү. Беренче тигезләмәдән дә, икенчесеннән дә x ны яки y ны гади генә табып булмый, шуңа күрә алыштырып кую юлын куллана алмыйбыз. Яңа үзгәрешле кертеп карыйк. $x+y=a$ һәм $xy=b$ дип билгелик. Ул вакытта: $\begin{cases}a+b=11\\a-2b=-7.\end{cases}$

Бу системаны чишәбез. Беренче тигезләмәдән икенчесен алабыз:

$$-\begin{cases}a+b=11\\a-2b=-7\end{cases}$$

$$a-a+b+2b=11+7$$
$$3b=18$$
$$b=6.$$

a ны табабыз: $a+b=11,$
$6+a=11,\qquad a=5.$

Шулай итеп, $a=5$ һәм $b=6$, ләкин $x+y=a$ һәм $xy=b$, димәк, $\begin{cases}x+y=5\\xy=6.\end{cases}$ Беренче тигезләмәдән x ны табабыз: $x=5-y$. Бу аңлатманы икенче тигезләмәгә куябыз:

$$xy=6,$$
$$(5-y)y=6,$$
$$5y-y^2=6,$$
$$y^2-5y+6=0.$$

Бу тигезләмәне чишеп, $y_1 = 2$, $y_2 = 3$ не табабыз. x ны исәплик: $x = 5 - y$, $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

Җавап: $x_1=3$, $x_2=2$
$y_1=2$, $y_2=3$.

Мәсьәлә чишәргә: Турыпочмаклыкның периметры 54 м, ә аның мәйданы 180 м². Якларын табарга.

Чишү. Турыпочмаклыкның бер ягы x м, ә икенчесе y м булсын. Периметрның 54 м икәнлегеннән чыгып, беренче тигезләмәне төзибез:

$$2x + 2y = 54.$$

Мәйдан 180 м² га тигез. Моннан чыгып, икенче тигезләмәне төзибез:

$$xy = 180.$$

Тигезләмәләр системасы табылды: $\begin{cases} 2x + 2y = 54, \\ xy = 180. \end{cases}$

Беренче тигезләмәнең ике ягын да 2 гә бүлеп, ан[illegible]адиләштерәбез:

$$\begin{cases} x + y = 27, \\ xy = 180. \end{cases}$$

Бу системаны, алда чишелгән системадагы кебек, алыштырып кую юлы белән чишеп булыр иде. Ләкин биредә ике санның суммасы да, тапкырчыгышы да билгеле икәнен күрәбез. Виет теоремасына кире теорема нигезендә, 27 һәм 180 квадрат тигезләмәнең коэффициентлары булырлар:

$$a^2 - 27a + 180 = 0.$$

Бу тигезләмәне чишеп, табабыз: $a_1 = 12$, $a_2 = 15$, x һәм y системада симметрияле булып катнашалар, шуңа күрә

$$x_1 = 12, \qquad x_2 = 15$$
$$y_1 = 15 \qquad y_2 = 12.$$

Ләкин x һәм y — турыпочмаклыкның яклары.

Җавап: 12 м һәм 15 м.

Мисал. Тигезләмәләр системасын чишәргә: $\begin{cases} x^2 + xy = 15 \\ y^2 + xy = 10. \end{cases}$

Чишү. Ике тигезләмәне кушсак, сул якта сумманың квадраты килеп чыга:

$$x^2 + xy + y^2 + xy = 25,$$
$$x^2 + 2xy + y^2 = 25,$$
$$(x + y)^2 = 25.$$

Моннан $x + y = 5$ яки $x + y = -5$.

Бу тигезләмәләр белән бирелгән системаның теләсә кайсы тигезләмәсен берләштереп, ике система табабыз:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 + xy = 15 \end{cases} \quad \text{яки} \quad \begin{cases} x + y = -5, \\ x^2 + xy = 15. \end{cases}$$

Бу системаларны алыштырып кую юлы белән чишәбез. Беренче тигезләмәләрдән табабыз:

$$y = 5 - x \qquad y = -5 - x.$$

Һәм бу аңлатмаларны икенче тигезләмәгә куеп чишәбез:

$$x^2 + x(5 - x) = 15, \qquad x^2 + x(-5 - x) = 15,$$
$$x^2 + 5x - x^2 = 15, \qquad x^2 - 5x - x^2 = 15,$$
$$5x = 15, \qquad -5x = 15,$$
$$x = 3. \qquad x = -3.$$

y ны табабыз:

$$y = 5 - x \qquad y = -5 - x$$
$$y = 2 \qquad y = -2$$

Җавап: $x_1 = 3 \quad y_1 = 2$
$x_1 = -3 \quad y_2 = -2.$

33нче контроль эш

1. Тигезләмәләр системасын чишәргә: $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x^2 - xy + 2y^2 = 23. \end{cases}$

2. Турыпочмаклыкның периметры 30 см, ә диагонале $\sqrt{125}$ см. Турыпочмаклыкның якларын табарга.

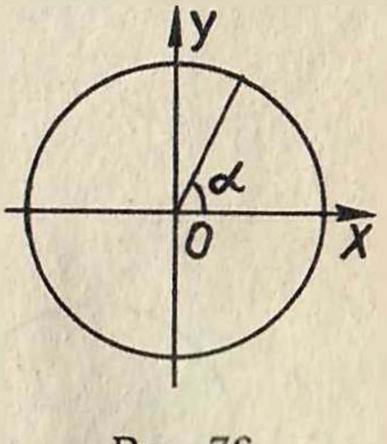
§ 34. ТРИГОНОМЕТРИК АҢЛАТМАЛАР ҺӘМ АЛАР ӨСТЕНДӘ РӘВЕШҮЗГӘРТҮЛӘР

Тригонометрик функцияләр

Почмакларны түбәндәгечә төзеп карыйк. Почмакның бер ягы итеп OX нурын санарбыз. Почмакның икенче ягын табу өчен, OX нурын сәгать теленә каршы юнәлештә почмак зурлыгына борырбыз. α почмагын табабыз (рәс. 76).

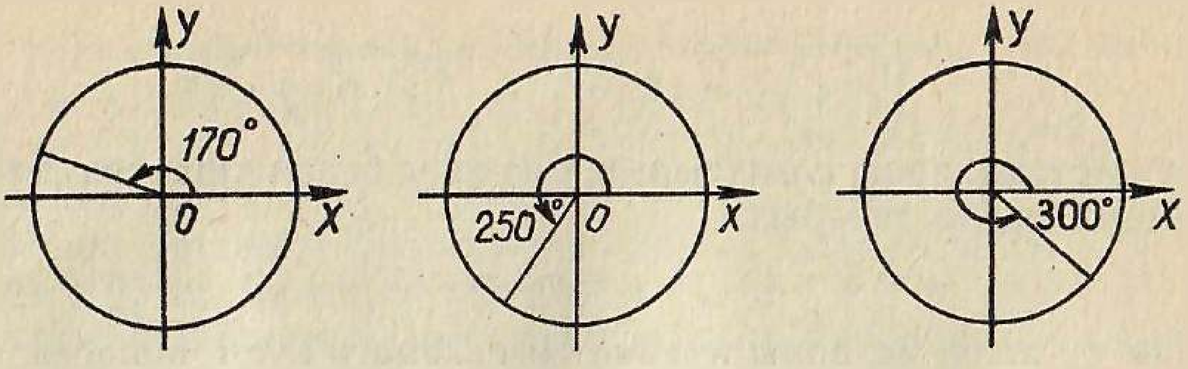
Бу ысул белән теләсә нинди зурлыктагы почмакларны төзергә мөмкин (рәс. 77).

400° лы почмакны да төзергә мөмкин. Моның өчен OX нурын тулы әйләнешкә, ягъни 360° ка, ә аннан соң тагын 40° ка борырга кирәк (рәс. 78).

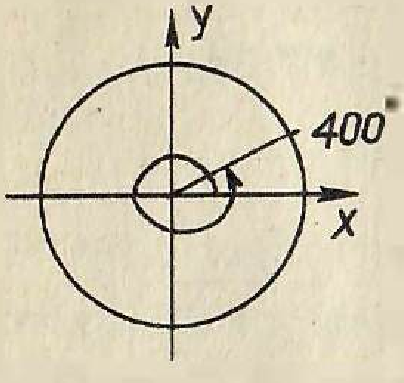


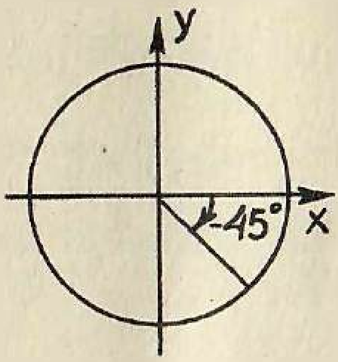
Рәс. 76

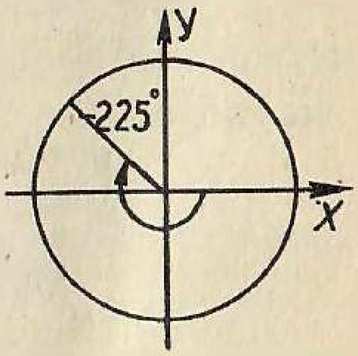
Нурны сәгать теленә каршы юнәлештә борып табылган почмакның зурлыгын уңай, ә сәгать теле юнәлешендә борып табылган почмак зурлыгын тискәре сан белән күрсәтәләр (рәс. 79).



Рәс. 77







Рәс. 78

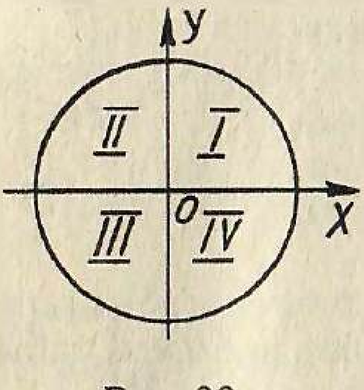
Рәс. 79

Координата күчәрләре әйләнәне 4 кисәккә бүләләр. Бу кисәкләрне чирекләр дип атап йөртәләр. Әгәр почмак 0° тан 90° ка кадәр зурлыкта булса, аны беренче чиректә ята диләр, әгәр 90° тан 180° кадәр булса — почмак икенче чиректә, әгәр 180° тан 270° ка кадәр булса — өченче чиректә, әгәр 270° тан 360° ка кадәр булса, дүртенче чиректә ята (рәс. 80).

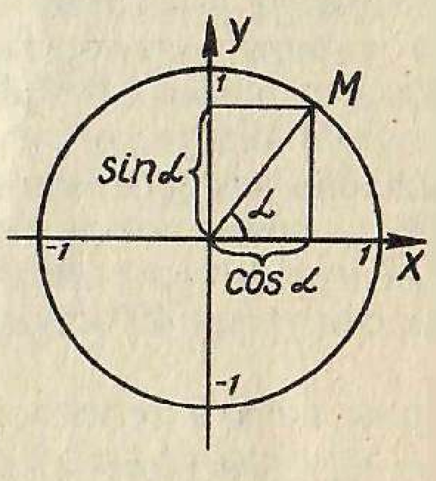
Билгеләмә. Радиусы берәмлеккә тигез, үзәге координаталар башлангычында булган әйләнә төзик. Әйләнә өстендә *M* ноктасын билгеләп, *OM* радиусын үткәрәбез. *MOX* почмагы табылды. *M* ноктасының ике координатасы бар. *M* ноктасының абсциссасы *MOX* почмагының **косинусы**, ә ординатасы — **синусы** дип атала (рәс. 81).

Билгеләмә. Синусның косинуска чагыштырмасын почмакның **тангенсы** дип атыйлар:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$



Рәс. 80



Рәс. 81

Билгеләмә. Косинусның синуска чагыштырмасын почмакның **котангенсы** дип атыйлар.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Алгебра курсында кайбер почмакларның функцияләре исәпләнгән иде инде.

Функция \ α	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Башка почмаклар өчен таблица төзик.

Функция \ α	0	90°	180°	270°	360°
sin	0	1	0	−1	0
cos	1	0	−1	0	1
tg	0	юк	0	юк	0
ctg	юк	0	юк	0	юк

Ул ничек төзелә?

М и с а л. Билгеләмә буенча sin 90°, cos 90°, tg 90°, ctg 90° ны табарга.

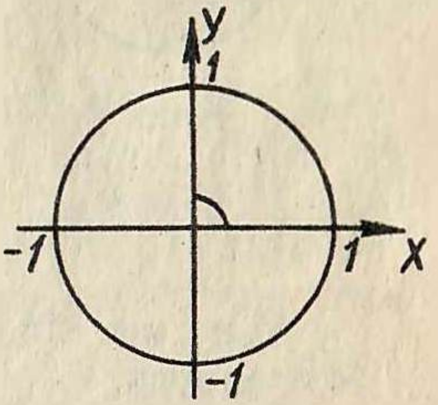
Ч и ш ү. 90° ка боргач, M ноктасы OY күчәренә күчә. Аның координаталары — (0,1).

Димәк, cos 90° = 0 һәм sin 90° = 1.

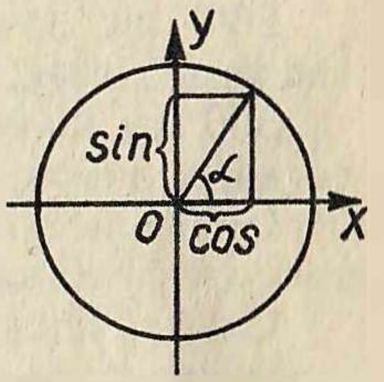
90° ның тангенс һәм котангенсын табу өчен чагыштырмаларны исәплибез:

$$\operatorname{tg} 90° = \frac{\sin 90°}{\cos 90°} = \frac{1}{0} \text{ — була алмый,}$$

$$\operatorname{ctg} 90° = \frac{\cos 90°}{\sin 90°} = \frac{0}{1} = 0.$$



Рәс. 82

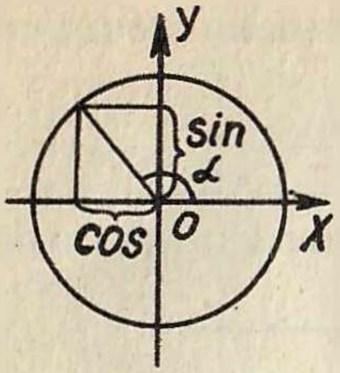


Рәс. 83

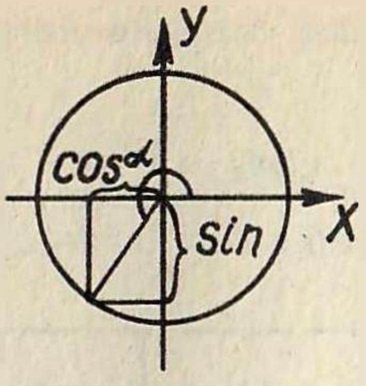
Функцияләр һәр чиректә нинди тамгалар ала?

$\sin\alpha > 0,$ $\cos\alpha > 0,$

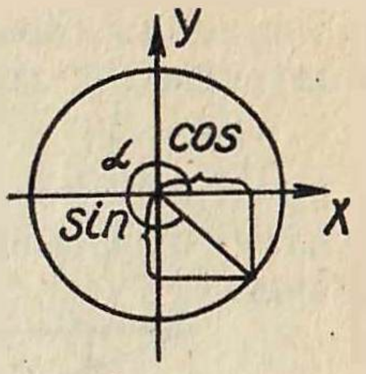
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} > 0,$ $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} > 0.$



Рәс. 84



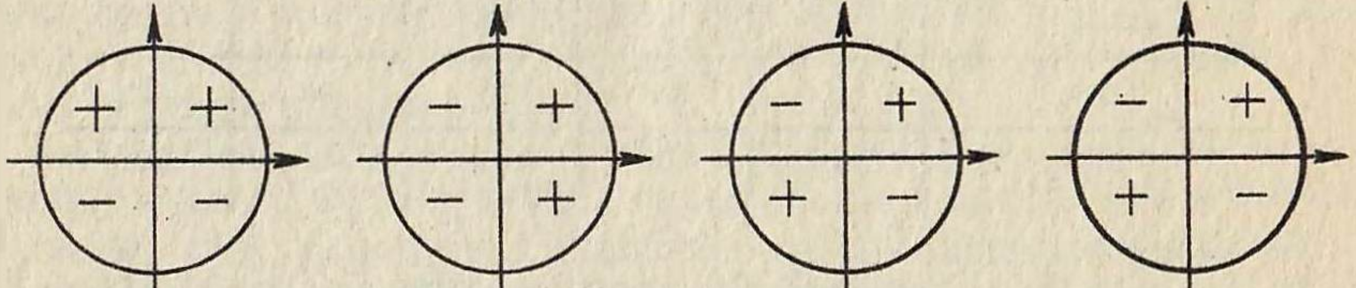
Рәс. 85



Рәс. 86

II чирек (рәс. 84)	$\sin\alpha > 0,$	$\cos\alpha < 0,$
	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} < 0,$	$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} < 0,$
III чирек (рәс. 85)	$\sin\alpha < 0,$	$\cos\alpha < 0,$
	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} > 0,$	$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} > 0,$
IV чирек (рәс. 86)	$\sin\alpha < 0,$	$\cos\alpha > 0,$
	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} < 0,$	$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} < 0.$

Алынган мәгълүматларны берләштерәбез:



$\sin\alpha$ $\quad$ $\cos\alpha$ $\quad$ $\operatorname{tg}\alpha$ $\quad$ $\operatorname{ctg}\alpha$

Рәс. 87

М и с а л. $\sin 120^\circ$, $\cos 200^\circ$, $\operatorname{tg} 300^\circ$, $\operatorname{ctg}(-60)^\circ$ ның тамгаларын билгеләргә.

Ч и ш ү. 120° лы почмак икенче чиректә урнашкан, ә икенче чиректә синус уңай, димәк, $\sin 120^\circ > 0$.

200° лы почмак өченче чиректә, ә өченче чиректә косинус тискәре, димәк, $\cos 200^\circ < 0$.

300° лы почмак дүртенче чиректә, ә дүртенче чиректә тангенс тискәре, димәк, $\operatorname{tg} 300^\circ < 0$.

(-60°) лы почмак дүртенче чиректә, дүртенче чиректә котангенс тискәре булганлыктан, $\operatorname{ctg}(-60)^\circ < 0$.

Синус, косинус, тангенс һәм котангенсларның кыйммәтләре почмакка тулы әйләнешләрне кушканнан үзгәрми. Чынлап та, әгәр

нурны 390° ка борабыз икән, без башта тулы әйләнеш ясыйбыз һәм тагын 30° ны өстибез. Шуңа күрә

$$\sin 390° = \sin(360° + 30°) = \sin 30°.$$
$$\cos 390° = \cos(360° + 30°) = \cos 30°.$$
$$\mathrm{tg}\, 750° = \mathrm{tg}(2 \cdot 360° + 30°) = \mathrm{tg}\, 30° \text{ (2 әйләнеш).}$$
$$\mathrm{ctg}\, 1100° = \mathrm{ctg}(3 \cdot 360° + 20°) = \mathrm{ctg}\, 20° \text{ (3 әйләнеш).}$$

Билгеләмә. Аргументның тамгасын үзгәрткәндә, функциянең кыйммәте үзгәрмәсә, ул **җөп функция** дип атала.

Мисал. $y = x^2$, $2^2 = (-2)^2 = 4$.

Косинус — җөп функция.

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

Билгеләмә. Аргументның тамгасын үзгәрткәндә, функциянең дә тамгасы үзгәрсә, ул **так функция** дип атала.

Мисал. $y = x^3$, $5^3 = 125$, ләкин $(-5)^3 = -125$.

Синус, тангенс, котангенс — так функцияләр.

Таклык яки җөплек формулалары:

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$,

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Мисал. Исәпләргә: $\sin(-60°) + \cos(-30°) + \mathrm{tg}(-45°)$.

Чишү. $\sin(-60°) = -\sin 60°$, $\cos(-30°) = \cos 30°$, $\mathrm{tg}(-45°) = -\mathrm{tg}\, 45°$.

Таблица буенча: $\sin(-60°) + \cos(-30°) + \mathrm{tg}(-45°) = -\sin 60° +$

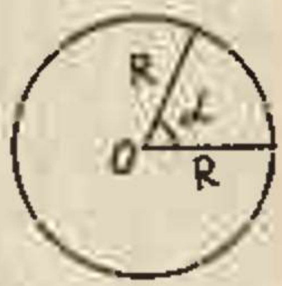
$$+ \cos 30° - \mathrm{tg}\, 45° = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -1.$$

Почмакларны үлчәү

Тормышта без унарлы санау системасын кулланабыз. Бер сантиметрда 10 миллиметр, бер килограммда — мең грамм һ.б.ш. Ә әйләнәдә 360°. Бу исә исәпләүләр өчен, бигрәк тә компьютерда эшләү өчен уңайсыз. Шуңа күрә почмакларны үлчәүнең безгә билгеле булган үлчәү берәмлеге — градустан башка тагын бер берәмлек — радиан да бар.

Билгеләмә. **Радиан** — дуга озынлыгы радиуска тигез булган почмак ул.

$$1 \text{ радиан} \approx 57°.$$



Рәс. 88

Әйләнә озынлыгы $C = 2\pi R$, ягъни әйләнәгә 2π радиан урнаша ала, димәк, $360° = 2\pi$ радиан.

Мисал. 30° ны радианнарда күрсәтергә.

Чишү. 360° — 2π радиан, 30° — x радиан, $x = \frac{30 \cdot 2\pi}{360} = \frac{\pi}{6}$.

Җавап: $30° = \frac{\pi}{6}$ радиан.

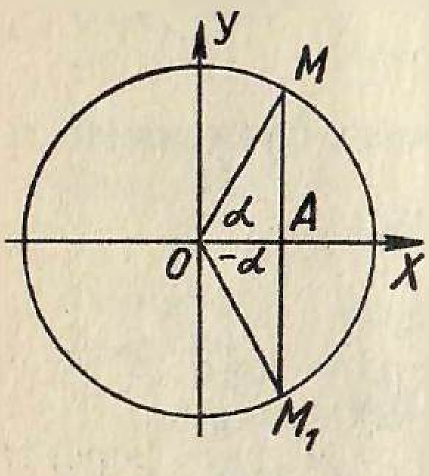
М и с а л. $\frac{3\pi}{5}$ радианны градусларда күрсәтегез.

Ч и ш ү. $360° — 2\pi$ рад. $x° — \frac{3\pi}{5}$ рад. $x = \frac{360° \cdot \frac{3\pi}{5}}{2\pi} = 36 \cdot 3 = 108°$.

Җ а в а п: $\frac{3\pi}{5} = 108°$.

Теорема 8.1. ***Синус, тангенс һәм котангенс — так функцияләр, ә косинус — җөп функция.***

И с б а т л а у.



Рәс. 89

α һәм $-\alpha$ почмакларын төзик. M һәм M_1 нокталары OX күчәренә карата симметрияле, димәк, аларның абсциссалары бер үк, ягъни аларның косинусларының кыйммәтләре бер үк дигән сүз. Шуңа күрә, $\cos(-x) = \cos x$.

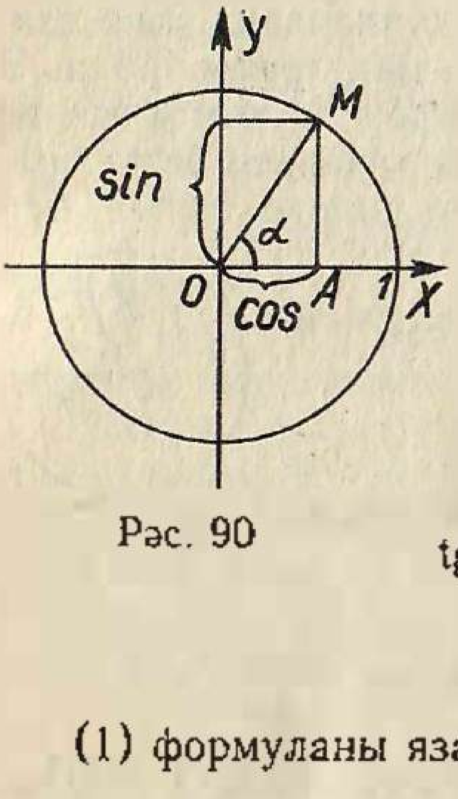
MOA һәм M_1OA өчпочмакларының тигезлегеннән (гипотенузасы һәм катеты буенча) M һәм M_1 нокталары ординаталарының озынлыклары үзара тигез, ләкин тамгалары төрле икәне килеп чыга. Шулай итеп, синус — так функция:

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

Тангенс һәм котангенс җөп һәм так функцияләрнең чагыштырмаларыннан килеп чыга һәм шуңа күрә алар так функцияләр булалар.

$$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha, \quad \mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha.$$

Тригонометриянең төп формулалары



Рәс. 90

AOM өчпочмагы — турыпочмаклы. Пифагор теоремасы буенча $OM^2 = AO^2 + AM^2$. Ләкин $OM = 1$, $OA = \cos\alpha$ һәм $AM = \sin\alpha$. Шуңа күрә,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \quad (1)$$

Билгеләмә буенча $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. (2)

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (3)$$

$$\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \sin\alpha} = 1$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha = 1. \quad (4)$$

(1) формуланы язабыз: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Аның ике ягын да $\cos^2\alpha$ га бүләбез:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \text{ яки}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}. \qquad (5)$$

Шуңа охшаш рәвештә $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ (6) формуласы килеп чыга.

(1) — (6) формулалары *төп формулалар* дип аталалар.

М и с а л. Б и р е л г ә н: $\sin\alpha = \frac{2}{5}$, α — икенче чиректә.

Т а б а р г а: cosa, tga, ctga.

Ч и ш ү. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. $\frac{4}{25} + \cos^2\alpha = 1$.

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{4}{25}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5} \text{ һәм } \cos\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}.$$

Почмакның икенче чиректә ятуы билгеле, ә икенче чиректә косинусның кыйммәте тискәре сан була, шуңа күрә $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}$.

(2) формуласы буенча $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2}{5} : \left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right) = -\frac{2}{\sqrt{21}}$.

(4) формуласы буенча $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Җ а в а п: $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{\sqrt{21}}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{2}$.

М и с а л. Б и р е л г ә н: $\operatorname{tg}\beta = 3$. β — өченче чиректә.

Т а б а р г а: $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\operatorname{ctg}\beta$.

Ч и ш ү. (5) формуласы буенча $1 + \operatorname{tg}^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta}$

$$1 + 9 = \frac{1}{\cos^2\beta}, \ \cos^2\beta = \frac{1}{10}, \ \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

Почмак өченче чиректә ятканлыктан, косинусның кыйммәтен "минус" тамгасы белән алабыз.

(1) формуласы буенча $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$.

$$\sin^2\beta = 1 - \frac{1}{10}, \quad \sin^2\beta = \frac{9}{10}, \quad \sin\beta = -\frac{3}{\sqrt{10}},$$

өченче чиректә синусның кыйммәте тискәре булганлыктан, "минус" тамгасы белән алабыз.

(4) формуласы буенча $\mathrm{ctg}\beta = \frac{1}{\mathrm{tg}\beta} = \frac{1}{3}$.

Җ а в а п: $\sin\beta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\mathrm{ctg}\beta = \frac{1}{3}$.

М и с а л. Гадиләштерергә: $2 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$.

Ч и ш ү. (1) формуласы буенча $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

$1 + 1 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha =$
$= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

М и с а л. Гадиләштерергә: $\sin^2\beta + \cos^2\beta + \mathrm{ctg}^2\beta$.

Ч и ш ү. (1) формуласы буенча $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$.

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta + \mathrm{ctg}^2\beta = 1 + \mathrm{ctg}^2\beta = \frac{1}{\sin^2\beta}.$$

(6) формуласы буенча $1 + \mathrm{ctg}^2\beta = \frac{1}{\sin^2\beta}$.

М и с а л. Гадиләштерергә: $\sin(-\alpha)\cdot\cos(-\alpha)\mathrm{tg}(-\alpha)\mathrm{ctg}(-\alpha)$.

Ч и ш ү. Җөплек яки таклык формулалары буенча:

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$
$-\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(-\mathrm{tg}\alpha)\cdot(-\mathrm{ctg}\alpha) =$	(4) формуласы буенча
$= -\sin\alpha\cos\alpha$.	$\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha = 1$.

М и с а л. Бердәйлекне исбатларга: $\frac{1+\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{ctg}\beta} = \mathrm{tg}\beta$.

И с б а т л а у. (4) формуласы буенча $\mathrm{ctg}\beta = \frac{1}{\mathrm{tg}\beta}$.

$$\frac{1+\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{ctg}\beta} = \frac{1+\mathrm{tg}\beta}{1+\frac{1}{\mathrm{tg}\beta}} = \frac{\mathrm{tg}\beta}{1} = \mathrm{tg}\beta.$$

Кушу формулалары һәм аларның нәтиҗәләре

Барлык почмаклар өчен дә без исбатламыйча гына кабул итә торган формулалар дөрес.

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \quad (7)$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta, \quad (8)$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha, \quad (9)$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha, \quad (10)$$

$$\mathrm{tg}(a+b) = \frac{\mathrm{tg}a + \mathrm{tg}b}{l - \mathrm{tg}a\mathrm{tg}b}, \quad (11)$$

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{1 + \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}. \quad (12)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}. \qquad (13)$$

М и с а л. Бирелгән: $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\sin\beta=\frac{1}{3}$, α һәм β — I чиректә.

Т а б а р г а: $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$.

Ч и ш ү. Башта $\cos\alpha$ ны табабыз:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$

$$\frac{1}{4}+\cos^2\alpha=1,$$

$$\cos^2\alpha=1-\frac{1}{4},\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

α почмагы беренче чиректә ята, ә бирeдә косинус уңай, шуңа күрә косинусны "плюс" тамгасы белән алабыз. $\cos\beta$ ны табабыз:

$$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1,$$

$$\frac{1}{9}+\cos^2\beta=1,$$

$$\cos^2\beta=1-\frac{1}{9},\qquad \cos\beta=\frac{\sqrt{8}}{3}.$$

β почмагы беренче чиректә ята, ә беренче чиректә косинус уңай, шуңа күрә "плюс" тамгасы белән алабыз.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{8}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{8}+\sqrt{3}}{6},$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{8}}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{24}+1}{6}.$$

Җ а в а п: $\sin(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{8}+\sqrt{3}}{6}$, $\cos(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{24}+1}{6}$.

1 нче нәтиҗә. **Китерү формулалары:**

Билгеләмә. $\sin(90^\circ\pm\alpha)$, $\cos(\frac{\pi}{2}+\beta)$, $\operatorname{tg}(270^\circ\pm\alpha)$, $\operatorname{ctg}(\pi\pm\alpha)$ һ.б.ш. рәвештәге бәйләнешләр **китерү формулалары** дип атала.

Кагыйдә. *Әгәр китерү формуласында* 90° *һәм* 270° *лы вертикаль диаметр почмаклары булса, функция тиңдәшле рәвештә синустан косинуска, тангенстан котангенска яки киресенчә үзгәрә. Әгәр китерү формуласында* 180° *һәм* 360° *лы горизонталь диаметр почмаклары булса, функция үзгәрми. Җавапның тамгасын, почмакны кысынкы дип алып, бирелгән функция буенча билгеләргә кирәк.*

Исбатлау.

Теләсә кайсы формуланы, мәсәлән, $\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ икәнен исбатлыйк.

(10) формуласы буенча аерманың синусын табабыз:

$$\sin(270^\circ - \alpha) = \sin 270^\circ \cos\alpha - \sin\alpha \cos 270^\circ =$$
$$= -1 \cdot \cos\alpha - 0 \cdot \sin\alpha = -\cos\alpha.$$

Тангенс һәм котангенс өчен формулалар бүлү юлы белән исбатланалар. Мәсәлән, $\mathrm{tg}(180^\circ + \alpha) = \mathrm{tg}\alpha$ формуласын исбатлыйк.

$$\mathrm{tg}(180^\circ + \alpha) = \frac{\sin(180^\circ + \alpha)}{\cos(180^\circ + \alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha.$$

Мисал. Аңлатмаларны гадиләштерергә:

Чишү. $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$, биредә 90° бар, косинуска үзгәртәбез, почмак икенче чиректә.

$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$, 90° бар — косинусны синуска үзгәртәбез, почмак икенче чиректә.

$\mathrm{tg}(180^\circ - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$, 180° лы почмак бар, функцияне үзгәртмибез, почмак икенче чиректә.

$\mathrm{ctg}(360^\circ - \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$, 360° лы почмак бар, функцияне үзгәртмибез, почмак дүртенче чиректә.

Мисал. Аңлатманы гадиләштерергә:

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{tg}(\alpha - 2\pi)\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right),$$

$$\frac{\pi}{2} \text{ рад} = 90^\circ,\ \frac{3\pi}{2} \text{ рад} = 270^\circ,\ 2\pi \text{ рад} = 360^\circ.$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ \mathrm{tg}(\alpha - 2\pi) &= -\mathrm{tg}(2\pi - \alpha) \\ \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) &= \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \end{aligned}\right| \quad \text{Таклык яки җөплек формулалары буенча}$$

$$\left.\begin{aligned} -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= -\sin(90^\circ - \alpha) = -\cos\alpha \\ -\mathrm{tg}(2\pi - \alpha) &= -\mathrm{tg}(360^\circ - \alpha) = \mathrm{tg}\alpha \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos(270^\circ - \alpha) = -\sin\alpha \end{aligned}\right\} \quad \text{Китерү формулалары буенча}$$

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \mathrm{tg}(\alpha - 2\pi) \cdot \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos\alpha \cdot \mathrm{tg}\alpha \cdot (-\sin\alpha) =$$
$$= \cos\alpha \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha = \sin^2\alpha$$

2 нче нәтиҗә. **Икеләтелгән почмак формулалары:**

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad (15)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \quad (16)$$

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}, \quad (17)$$

$$\mathrm{ctg}2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha}{2\mathrm{ctg}\alpha} \quad (18)$$

(15) формуласын исбатлау.

Сумманың синусы формуласын (9) кулланабыз:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$ һәм $\alpha = \beta$ дип алабыз.

Ул вакытта:

$\sin(\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$

(16) формуласын исбатлау.

Сумманың косинусы формуласын (7) кулланабыз:

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ һәм $\alpha = \beta$

дип алабыз. Ул вакытта:

$\cos(\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$

(17) формуласын исбатлау.

Сумманың тангенсы формуласын (11) кулланабыз:

$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$ һәм $\alpha = \beta$ дип алабыз.

$$\mathrm{tg}(\alpha + \alpha) = \mathrm{tg}2\alpha = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\alpha} = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}.$$

(18) формуласы шулай ук исбатлана.

Мисал. Бирелгән: $\sin\alpha = \frac{1}{5}$, α — 1 чиректә ята.

Табарга: $\cos 2\alpha$, $\mathrm{tg}2\alpha$.

Чишү. $\cos\alpha$ ны табабыз: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\frac{1}{25} + \cos^2\alpha = 1$.

$$\cos^2\alpha = \frac{24}{25}, \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{24}}{5}.$$

Почмак беренче чиректә урнашкан, беренче чиректә косинус уңай, шуңа күрә "плюс" тамгасы куябыз.

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{2\sqrt{24}}{25}.$$

$\operatorname{tg}\alpha$ ны табабыз: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{5} : \frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{1}{\sqrt{24}}$,

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}, \quad \operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{24}}}{1-\frac{1}{24}} = \frac{2}{\sqrt{24}} : \frac{23}{24} = \frac{2\sqrt{24}}{23}.$$

Җавап: $\sin 2\alpha = \frac{2\sqrt{24}}{25}$, $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\sqrt{24}}{23}$.

Мисал. Аңлатманы гадиләштерергә: $10\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}$.

Чишү. Бу аңлатманың (15) формуласына охшаган булуын күрәбез, $\frac{\pi}{12}$ рад $= 15^\circ$, $10\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12} = 5\cdot 2\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ = 5\sin 30^\circ =$ $= 5\cdot 0{,}5 = 2{,}5$.

Җавап: 2,5.

3 нче нәтиҗә. **Тригонометрик функцияләрнең суммасы яки аермасы формулалары:**

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad (19)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \quad (20)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad (21)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \quad (22)$$

(19) формуласын исбатлыйбыз.

$\alpha = x + y$ һәм $\beta = x - y$ дип алыйк.

$$\sin\alpha + \sin\beta = \sin(x+y) + \sin(x-y) =$$
$$= \sin x\cos y + \cos x\sin y + \sin x\cos y - \cos x\sin y = 2\sin x\cos y.$$

x һәм y ны табабыз:

$$+\begin{cases} x + y = \alpha \\ x - y = \beta \end{cases} \qquad -\begin{cases} x + y = \alpha \\ x - y = \beta \end{cases}$$

$$2x = \alpha + \beta \qquad 2y = \alpha - \beta$$

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2} \qquad y = \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Шулай итеп,

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Башка формулалар шундый ук юл белән исбатлана.

Мисал. Аңлатманы гадиләштерергә: $\frac{\cos 20^\circ - \cos 40^\circ}{\cos 10^\circ}$.

Чишү. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

(22) формуласын кулланабыз:

$$\cos 20^\circ - \cos 40^\circ = -2\sin\frac{20^\circ + 40^\circ}{2}\cdot\sin\frac{20^\circ - 40^\circ}{2} =$$

$$= -2\sin 30^\circ\cdot\sin(-10^\circ) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 10^\circ = \sin 10^\circ.$$

$$\frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} = \operatorname{tg} 10^\circ.$$

Мисал. Аңлатманы гадиләштерергә: $\frac{\sin 5\alpha + \sin\alpha}{2\sin 3\alpha\cdot\sin 2\alpha}$

(19) формуласы буенча:

$$\frac{\sin 5\alpha + \sin\alpha}{2\sin 3\alpha\cdot\sin 2\alpha} = \frac{2\sin\frac{5\alpha+\alpha}{2}\cdot\cos\frac{5\alpha-\alpha}{2}}{2\sin 3\alpha\cdot\sin 2\alpha} = \frac{\sin 3\alpha\cdot\cos 2\alpha}{\sin 3\alpha\cdot\sin 2\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha$$

34 нче зачет

1. Синус, косинус, тангенс һәм котангенсның билгеләмәсе.
2. Нәрсә ул радиан?
3. Нинди функция җөп, нинди функция так функция дип атала?
4. Түбәндәге почмакларның радианлы үлчәмен градуслы үлчәмнәрдә күрсәтүне яттан белергә:

$$\frac{\pi}{6} = 30^\circ,\ \frac{\pi}{4} = 45^\circ,\ \frac{\pi}{3} = 60^\circ,\ \frac{\pi}{2} = 90^\circ,\ \pi = 180^\circ,$$

$$\frac{3\pi}{2} = 270^\circ,\ 2\pi = 360^\circ.$$

5. (1) дән (6) га кадәрге төп формулаларны яттан белергә.

"4" һәм "5" ле өчен өстәмә рәвештә 1, 2 һәм 3 нче нәтиҗәләрне исбатларга кирәк.

34 нче контроль эш

1. Бирелгән: $\cos\beta = \frac{5}{6}$, β — 3 чиректә.

   Табарга: $\sin\beta$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{ctg}\beta$.

2. Аңлатманы гадиләштерергә: $\frac{\cos^2\alpha}{1 - \sin 2\alpha}$.

ЭЧТӘЛЕК

Кереш сүз 3

7 нче сыйныф

§ 1. Аңлатмалар 4
§ 2. Рациональ саннар 10
§ 3. Дәрәҗә 12
§ 4. Бербуыннар 17
§ 5. Бердәйлекләр һәм тигезләмәләр 21
§ 6. Функция 25
§ 7. Туры пропорциональлек . . . 32
§ 8. Кире пропорциональлек . . . 38
§ 9. Сызыкча функция 45
§ 10. Күпбуыннарның суммасы һәм аермасы 48
§ 11. Бербуынны күпбуынга тапкырлау 50
§ 12. Күпбуыннарны тапкырлау . 56
§ 13. Квадратлар аермасы 61
§ 14. Сумманың һәм аерманың квадраты 63
§ 15. Кублар суммасы һәм аермасы 67
§ 16. Тигезләмәләр системалары 69

8 нче сыйныф

§ 17. Алгебраик вакланмаларны кушу һәм алу 75
§ 18. Вакланмаларны тапкырлау һәм бүлү 81
§ 19. Бердәй рәвешүзгәртүләр . . 84
§ 20. Квадрат тамырлар 87
§ 21. Квадрат тамырларның үзлекләре 93
§ 22. Квадрат тигезләмәләр 100
§ 23. Вакланмалы рациональ тигезләмәләр 110
§ 24. Тигезсезлекләр 116
§ 25. Тигезсезлекләр системалары 122
§ 26. Бөтен күрсәткечле дәрәҗә 126

9 нчы сыйныф

§ 27. Квадрат функция 131
§ 28. Тигезләмәләрне һәм тигезләмәләр системаларын график юл белән чишү 138
§ 29. Эзлеклелекләр 141
§ 30. Арифметик прогрессия . . . 144
§ 31. Геометрик прогрессия 149
§ 32. Рациональ күрсәткечле дәрәҗә 154
§ 33. Тигезләмәләр системалары һәм мәсьәләләр чишү 160
§ 34. Тригонометрик аңлатмалар һәм алар өстендә рәвешүзгәртүләр 163